Carlo Felice Manara

La matematica nel XX secolo

Estratto da

STORIA delle SCIENZE/2

diretta da Evandro Agazzi

Città Nuova Editrice

Roma 1984

XX
La matematica nel XX secolo

di Carlo Felice Manara e Giulio Giorello

Introduzione: I «problemi matematici» di Hilbert; Le opere di sintesi e di rifondazione della matematica – La geometria del Novecento: Trasformazione della «geometria»; Alcune vicende della geometria algebrica. Il programma della «scuola italiana» e qualche sviluppo successivo (Il rinnovamento costituito dalla «teoria di Hodge», Sviluppi della geometria algebrica astratta. L'approccio di Weil e di Zariski); Cenni relativi alla geometria differenziale; Brevissimi cenni su altri settori della ricerca geometrica – L'analisi funzionale e il rinnovamento della ricerca analitica: Caratteri generali; Il classico problema delle aree e dei volumi. Dalla teoria di Lebesgue a quella di Haar; Aspetti generali dell'«analisi funzionale»; Un caso specifico. Lo «spazio di Hilbert» e la teoria spettrale; Cenni su equazioni e sistemi differenziali ordinari, alle derivate parziali e calcolo delle variazioni (Equazioni differenziali ordinarie, Equazioni alle derivate parziali, Il calcolo delle variazioni e le sue estensioni); La nozione di «problema ben posto» e alcune riflessioni conclusive sulla ricerca nell'analisi – Modellizzazione quantitativa e qualitativa dei processi reali: Alcuni fattori della «rivoluzione» nel calcolo numerico (La teoria dell'informazione, Cibernetica e teoria degli automi, I moderni elaboratori elettronici); Matematica del continuo o matematica del discreto?; Stabilità e instabilità: i modelli «qualitativi» della teoria delle catastrofi – Alcune connessioni tra logica e matematica

1. Introduzione

a) *I «problemi matematici» di Hilbert*

In una celebre relazione al II Congresso Internazionale dei matematici con cui si apre il secolo (Parigi, 1900) David Hilbert (1852-1943) enunciava ventitré problemi aperti che facevano il punto della situazione della ricerca: alcuni erano di carattere generale e concernevano, in vario modo, i problemi relativi ai «fondamenti» della matematica pura e applicata: altri, di carattere piú specifico, spaziavano nelle branche piú diverse – dalla teoria dei numeri al calcolo delle variazioni. Ora, sebbene la lista hilbertiana fosse tutt'altro che esaustiva – mancano, per esempio, non pochi problemi di una disciplina relativamente nuova, la topologia, che venivano allora enunciati dal grande Henri Poincaré (1854-1912) – essa aspirava comunque a «gettare dei ponti» attraverso discipline «i cui cultori già facevano fatica ad intendersi» e a ritrovare in questo modo un'unità profonda al di là della apparente frammentazione.

L'elenco hilbertiano è significativo anche da un altro punto di vista. Esso, infatti, viene presentato al termine di un secolo come l'Ottocento, in cui la matematica si trasformava via via da «scienza dei contenuti» a «scienza di procedure». Una serie di slittamenti aveva infatti notevolmente cambiato il quadro nello spazio di un centinaio di anni. «Non c'è problema che non sia riducibile, in ultima analisi, a una questione di numeri» scriveva ancora nel 1831 il filosofo positivista Auguste Comte (1798-1854); ma già nel 1844 il matematico tedesco Hermann Grassmann (1809-1877) osservava che «la matematica non poteva dirsi legittimamente solo scienza dei numeri e delle grandezze». Ai primi del Novecento, infine, la ricerca aveva ancora maggior consapevolezza del proprio carattere «procedurale». Nei *Problemi matematici* Hilbert insisteva che la stessa enunciazione di un problema matematico richiede una sottile analisi logica. Solo dichiarando in anticipo le premesse da cui si parte nell'affrontare un problema (è questa «la onestà intellettuale del buon matematico», come dichiarerà, circa mezzo secolo dopo, il bourbakista JEAN DIEUDONNÉ, n. 1906) si ha, a detta di Hilbert, la garanzia di procedere in modo corretto, di cercare cioè una risposta adeguata a una domanda ben formulata. Il rigore hilbertiano sarà preso a modello per l'intera impresa scientifica – e per una filosofia «all'altezza dei tempi» – dai positivisti logici di Vienna e di Berlino negli anni venti; ricomparirà come termine di confronto in imprese di sintesi e di ricostruzione («l'architettura delle matematiche») di Nicolas Bourbaki (vedi oltre, p. 252); costruirà un paradigma per moltissima trattatistica matematica. D'altra parte la strategia che Hilbert proponeva per risolvere i problemi matematici, non era che quel *metodo assiomatico* che, nella sua forma moderna, era stato una delle piú importanti acquisizioni dell'Ottocento. La scoperta delle geometrie non-euclidee, soprattutto con l'aver evidenziato la possibilità di costruire geometrie coerenti quanto quella di Euclide movendo da sistemi di assiomi diversi da quelli classici, aveva messo in risalto che il metodo assiomatico non solo consisteva nel prendere coscienza delle ammissioni di base e nel dimostrare rigorosamente ciò che non appariva chiaro, ma comportava ormai l'ammissione del fatto che la scelta degli assiomi non era dovuta ai contenuti, ovvero a una pretesa «evidenza» che li avrebbe appieno giustificati, ma era semplicemente l'accettazione di certe proposizioni iniziali, costituenti i punti di partenza degli sviluppi successivi.

Questo non vuol dire, però, che la comunità dei matematici non disponga di criteri di valutazione di un dato sistema di assiomi: *si tratterà*, però, *di criteri di tipo formale*; per esempio, si richiederà la «coerenza» (o «non contraddittorietà» o anche «consistenza», come altri dice) del sistema e ancora l'«indipendenza» di ciascun assioma dagli altri. Non casualmente questi requisiti sono soddisfatti dalla ricostruzione della geometria euclidea che lo stesso Hilbert aveva compiuto nei suoi *Fondamenti della geometria* (1899) e il problema di accertare coerenza e indipendenza degli assiomi di un sistema matematicamente interessante – per esempio l'aritmetica o l'analisi o la teoria degli insiemi – affiora già nei *Problemi matematici* (in particolare, problemi I e II), per diventare il nucleo centrale – a partire da un'importante memoria del 1904 – del cosiddetto «programma di Hilbert» (cf. oltre, p. 290).

I problemi di Hilbert costituiranno alcuni dei principali obiettivi della ricerca del Novecento, stimolando alla scoperta di nuovi metodi e nuove teorie. Già si è detto che alcune regioni della matematica erano pressoché assenti dalla «mappa» hilbertiana; ma di questo non c'è da stupirsi, data l'impossibilità – che lo stesso Hilbert apertamente ammetteva – per un uomo solo di abbracciare tutti i problemi della matematica. A distanza di decenni dal tentativo hilbertiano – peraltro esemplare per le ragioni di cui si è detto – una revisione si è dunque resa necessaria.

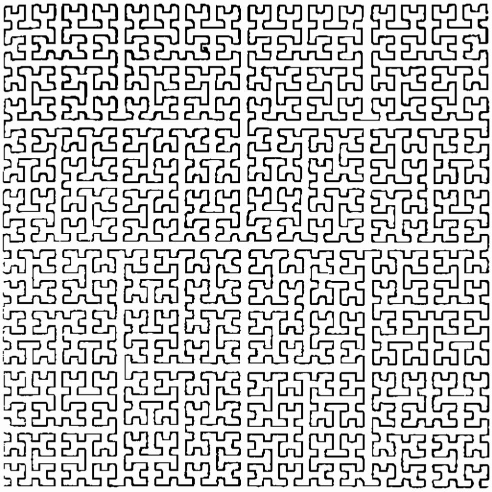
Ricercatori militanti hanno guardato, con sempre maggiore interesse, alla storia della matematica ricostruita essenzialmente come storia di problemi, facendo propria un'idea che incisivamente era stata formulata da uno dei piú grandi matematici italiani del Novecento, FEDERIGO ENRIQUES (1871-

1946): *la storia della scienza come parte costitutiva della scienza stessa.* Qui si citeranno solo due contributi relativi alla storia dei «problemi di Hilbert» *dopo* Hilbert: il primo è costituito da una raccolta di saggi di vari autori, *I problemi di Hilbert*, coordinata da P.S. Aleksandrov e pubblicata a Mosca nel 1969 (l'edizione tedesca, pubblicata nella DDR, *Die Hilbertschen Probleme*, è del 1971); ciascun articolo esamina gli sviluppi di un problema hilbertiano, con particolare attenzione alle questioni aperte. Un punto di vista analogo sottende anche il piú recente *Mathematical developments arising from Hilbert problems*, pubblicato nel 1976 dall'American Mathematical Society. Questo volume contiene gli atti di un convegno internazionale promosso dall'AMS a De Kalb (Illinois) nel maggio 1974, mirante, come scrive F.E. Browder, il curatore, «a conseguire un quadro ampio il piú possibile della ricerca matematica pertinente ai problemi hilbertiani». Ma quel che rende peculiare il volume di De Kalb rispetto a iniziative analoghe è che esso include un articolo, *Problems of present day mathematics*, che vuol essere una rassegna – certo «senza alcuna pretesa di completezza» – dei problemi aperti nella ricerca attuale, ed elenca ben ventisette indirizzi di ricerca principali: dai problemi di fondamenti a quelli di teoria dei numeri, dalla geometria algebrica ai gruppi finiti, dalla topologia algebrica e differenziale alla teoria delle equazioni differenziali, ecc., per non parlare di probabilità statistica e fisica matematica. I *Problems* prendono origine da una iniziativa promossa da Jean Dieudonné: la ricognizione dei problemi odierni piú significativi mediante un'intensa comunicazione e collaborazione tra i matematici di tutto il mondo. Nella convinzione, come già diceva negli anni quaranta il bourbakista André Weil, che «se la logica è l'igiene della matematica, il suo pane sono i grandi problemi» che stimolano a ripensare in modo nuovo intere branche di questo sapere.

b) *Le opere di sintesi e di rifondazione della matematica*

Sarà ovviamente in questa sede impossibile dare un quadro esauriente di come si sia dispiegata la ricerca matematica dai tempi di un Hilbert o di un Poincaré ai giorni nostri, in cui la diffusione di nuovi mezzi di calcolo e di elaborazione dell'informazione ha dato incremento a ulteriori settori, cambiando anche profondamente l'intero panorama della scienza, non solo applicata, e ponendo, al contempo, le premesse di sviluppi di cui non si intravedono che i primi albori. Si procederà, quindi, in maniera necessariamente episodica, cercando di esemplificare con alcuni problemi che si ritengono particolarmente significativi e perspicui, e le revisioni che essi hanno comportato di alcuni «temi» matematici di fondo. In via preliminare, inoltre, sarà opportuno almeno un cenno a quella tendenza verso la sistematica e la classificazione delle teorie e delle nozioni della matematica che fa da contraltare, spesso con conseguenze rilevanti anche a livello istituzionale (formazione di nuovi ricercatori, trattatistica corrente, didattica della matematica, ecc.) a quella *vastità* dello scibile matematico che già Hilbert rilevava nella citata conferenza del 1900. Proprio una constatazione del genere, infatti, portava con sé lo stimolo quasi inevitabile alla sintesi, come dire al consuntivo di quell'accumularsi delle conoscenze, scoperte, teorie che aveva preso inizio piú di venti secoli prima e aveva conosciuto uno sviluppo tanto tumultuoso nel XIX sec.

Innanzitutto non va passata sotto silenzio l'impresa del *Formulario mathematico* promossa da Giuseppe Peano (1858-1932). Il matematico torinese, a cominciare dal 1894-



Una approssimazione della «curva di Peano» in cui nel 1890 il matematico ha offerto la rappresentazione di una curva continua capace di riempire un'intera area piana, e ottenuta mediante suddivisione del quadrato esterno in piccoli quadrati che vengono poi uniti con delle linee.

1895 aveva impostato la sistemazione dell'aritmetica mediante gli strumenti della logica formale, ricavando in modo rigoroso dai cinque celebri assiomi dell'artimetica che costituiscono una definizione implicita del concetto di *numero naturale* (essi in un contesto piú astratto si ritrovano già in *Essenza e significato dei numeri* di Richard Dedekind 1831-1916 – del 1888: la prima formulazione di Peano è del 1889) le proprietà formali del sistema dei naturali. In quest'ordine di idee, proteso alla aritmetizzazione e all'introduzione del rigore formale a ogni livello della matematica, Peano cercava di «fondare» la stessa analisi matematica, in particolare il concetto di numero *reale*, giungendo per questa via a risultati eleganti e diretti. Va rilevato infine che Peano aveva anche un senso preciso delle applicazioni numeriche dell'analisi: il che spiega come non pochi dei suoi allievi si siano interessati al calcolo numerico.

Mentre mirava a una sintesi che rendesse ragione di pressoché tutto lo scibile matematico, «ricostruito» a partire dal concetto di *numero naturale* come nozione-base, senza trascurare (come attestano le «note storiche» che arricchiscono il *Formulario*) le vicende interne alla matematica che avevano via via portato a formulazioni piú rigorose attraverso intuizioni, scoperte, congetture e controversie, Peano estendeva i propri interessi dalla matematica alla logica e alla comunicazione linguistica, dedicandosi infine alla creazione di una lingua quasi artificiale, che utilizza le radici piú frequenti nelle varie lingue naturali e adotta, semplificate, alcune regole classiche del latino («interlingua» o anche «latino sine flexione»).

Per varie ragioni l'impresa peaniana non è andata completamente a buon fine. Ma l'approccio di Peano all'aritmetica e all'analisi già pareva esemplare a un filosofo come Giovanni Vailati (1873-1909) allo scopo di rinnovare le stesse problematiche gnoseologiche, ed è stato salutato come una nuova fase particolarmente significativa di studi logici e linguistici da Bertrand Russell (1872-1970) che ebbe a lodarne la «grande penetrazione»; esso può infine essere inteso, proprio per l'insistenza su un linguaggio artificiale che faciliti la comunicazione scientifica e dissolva le ambiguità del linguaggio naturale, come un precorrimento delle ricerche neopositiviste sui «linguaggi perfetti», cioè non ambigui e appieno controllabili. Le riflessioni peaniane circa una lingua universale e le strutture comuni alle varie lingue, inoltre, vengono oggi rivalutate alla luce di recenti acquisizioni della linguistica. Né va dimenticato che il *Formulario*, inizialmente scritto in francese ma nelle ultime edizioni redatto in «interlingua» – con un apparato


CVLTVRA DELL' ANIMA

GIOVANNI VAILATI

GLI STRUMENTI DELLA CONOSCENZA

CON PREFAZIONE DI MARIO CALDERONI

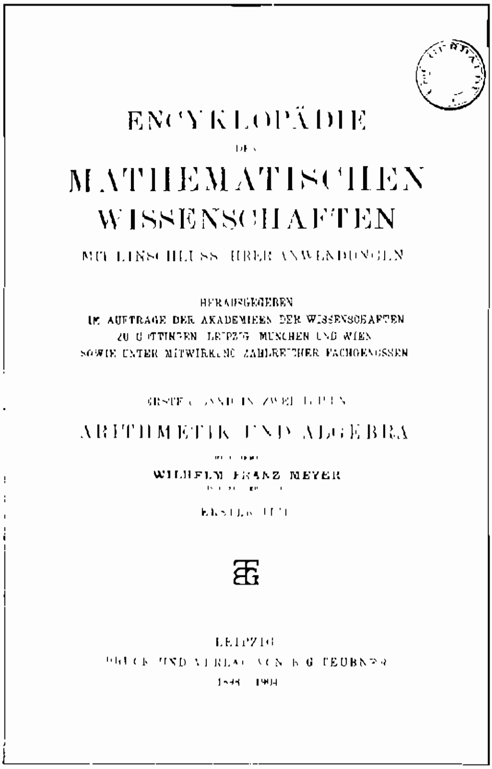
R. CARABBA, EDITORE LANCIANO

Frontespizio dell'opera Gli strumenti della conoscenza *di G. Vailati (R. Carabba, Lanciano 1916).*

simbolico sempre piú sofisticato – è spia di una tendenza che rispecchiava una esigenza interna alla stessa matematica, tendenza che riaffiorerà, sotto altre vesti, con Nicolas Bourbaki (per cui vedi p. 252).

La prima impresa internazionale che si poneva come scopo esplicito la compilazione di una vera e propria «enciclopedia» delle scienze matematiche si deve però a un gruppo di matematici francesi e tedeschi, i quali verso il 1900 ne progettarono la pubblicazione in vari volumi, redatti nelle due lingue, in modo da fornire non solo un esauriente panorama delle conoscenze e dei problemi della matematica all'inizio del secolo, ma anche gli aggiornamenti necessari per restare al passo dell'incessante crescita della scienza. L'enfasi sui vari settori è ben differente che nel *Formulario* peaniano, specie nell'importanza attribuita a quelli relativamente «nuovi»: cosí, per esempio, nella enciclopedia trova posto un articolo dedicato alla topologia, che la presenta come una sorta di dottrina delle trasformazioni continue delle figure (la «geometria delle figure di caucciú» o «di pasta frolla» come qualcuno scherzosamente l'ha definita) ma non trova posto la moderna logica formale; la questione dei «fondamenti» è affrontata dal punto di vista dei soli fondamenti della geometria, ma nessuna considerazione è data a quei problemi che riguardano i confini tra la matematica e la logica e nulla è detto circa le fondazioni della «validità» delle procedure che si suppongono di norma impiegate nel ragionamento matematico.

Della *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* o *Encyclopédie des sciences mathématiques* va ancora detto che lo scoppio della prima guerra mondiale, il conseguente cambio dei rapporti di forza tra le potenze, i problemi finanziari, infine il mutamento complessivo del panorama politico fecero sí che l'impresa della edizione in lingua tedesca venisse abbandonata, anche se i non pochi volumi usciti, spesso riediti e rivisti, avevano profondamente influito sull'assetto istituzionale dei settori di ricerca interessati. Verso gli anni trenta del secolo l'enciclopedia, infine, non piú aggiornata appare definitivamente superata. Va osservato che l'enciclopedia restava comunque utilissima come repertorio bibliografico. Ma essa, ovviamente, *non conteneva dimostrazioni*: proprio queste vengono invece incluse in quella che è stata considerata forse la piú importante e influente opera di sistemazione e rifondazione della matematica del Novecento, gli


ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN

HERAUSGEGEBEN
IM AUFTRAGE DER AKADEMIEEN DER WISSENSCHAFTEN
ZU GÖTTINGEN, LEIPZIG, MÜNCHEN UND WIEN
SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN

ERSTER BAND IN ZWEI TEILEN
ARITHMETIK UND ALGEBRA

WILHELM FRANZ MEYER

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1898–1904

La Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften *(B. G. Teubner, Leipzig 1898-1904). Una delle grandi opere di sintesi matematica con cui si apre il nostro secolo.*

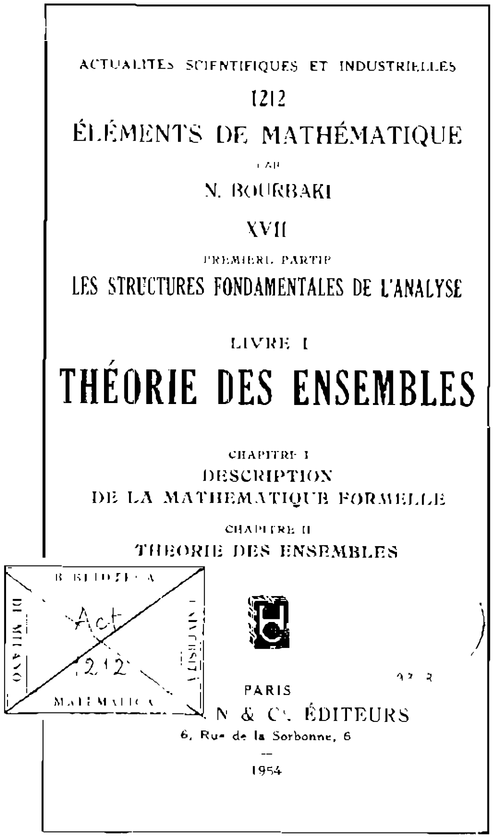
Eléments de mathématique di Nicolas Bourbaki. L'origine di questo «trattato», che al contempo si propone una articolazione diversa da quella dell'enciclopedia e una «rigida selezione», come dice Jean Dieudonné a proposito dei contenuti, trova la sua motivazione prima nel profondo disagio intellettuale delle nuove generazioni di matematici della Francia del primo dopoguerra. Profondamente falciata dal conflitto – i due terzi dei quadri dell'Ecole Normale, ricorda Jean Dieudonné, «furono brutalmente spazzati via» – la matematica francese era rimasta con i giovanissimi e con gli esponenti delle generazioni precedenti. «Maestri come E. Picard, E. Borel, P.A. Montel, J. Hadamard, A. Denjoy, H.L. Lebesgue – scrive ancora Dieudonné – erano ancora estremamente attivi, ma erano anche prossimi alla cinquantina, se non l'avevano già passata. Nel dopoguerra, tra questa e la nuova generazione si era formata una lacuna». Piú oculatamente il governo tedesco aveva risparmiato i suoi ricercatori sicché non c'era da stupirsi «che la scuola tedesca annoverasse matematici di primo piano come C.L. Siegel, E. Noether, E. Artin, W. Krull, H. Hasse: di questi in Francia non si sapeva nulla. Del resto si ignorava anche il rapido sviluppo della scuola russa o di quella polacca (...). La matematica francese restava chiusa in se stessa. Dominava incontrastata la teoria delle funzioni, che, pur essendo importante, rappresenta sola una parte della matematica. Solo Élie Cartan costituiva un'eccezione: ma essendo di vent'anni piú avanti dei matematici francesi a lui contemporanei, non era capito da nessuno».

Cosí, appunto, Jean Dieudonné, che con H. Cartan, C. Chevalley, J. Delsarte, A. Weil, sembra essere stato tra i fondatori del gruppo che scelse lo pseudonimo di «Nicolas Bourbaki» (un nome di un generale francese del secolo scorso, abbastanza «esotico» per far rimarcare l'insoddisfazione per lo stato generale della matematica francese) inizialmente (verso il 1935) per firmare note, rassegne e memorie pubblicate nei «Comptes Rendus» dell'Accademia delle Scienze (e altrove), quindi per dare vita a un trattato mirante a esporre in forma sistematica e rigorosa i capitoli «fondamentali della matematica».

Com'è noto, gli *Eléments de mathématique* (al gruppo originario si sono uniti altri ricercatori, non necessariamente tutti francesi e l'*équipe* si è «rigenerata» imponendo ai propri membri il ritiro a cinquant'anni) che hanno conosciuto riedizioni e rifacimenti fino ai giorni nostri, si imperniano sulla nozione-base di «struttura matematica». In questo i bourbakisti si collocano esplicitamente nella tradizione di Dedekind e di Hilbert: le «strutture matematiche» non sono altro, dette informalmente, che quei sistemi di oggetti e relazioni che soddisfano dati sistemi di assiomi. Un paradigma è costituito, per esempio, dalla sistemazione assiomatica di fondamentali concetti algebrici, emersi via via nello sviluppo della matematica, specie nell'Ottocento: gruppi, anelli, corpi, spazi vettoriali, ecc., che erano stati presentati in forma sistematica all'inizio degli anni trenta da un fondamentale trattato, *Moderne Algebra*, dovuto all'olandese BARTEL LEENDERT VAN DER WAERDEN (n. 1903) che apertamente riconosceva il suo debito verso i matematici tedeschi, in particolare verso EMMY NOETHER (1882-1935). L'algebra «moderna» o «astratta» qualificata in tale modo quasi in contrapposizione all'algebra intesa tradizionalmente come «analisi delle equazioni», in realtà, nelle intenzioni di van der Waerden, non mirava a tramutarsi in una ricerca puramente formale, scissa da ogni motivazione (anzi, proprio l'autore ribadiva le importanti applicazioni di quelle che i bourbakisti chiameranno «strutture algebriche» nella teoria dei numeri e nella geometria algebrica, nonché nel contesto di rilevanti e innovative teorie fisiche come relatività e quanti), ma cercava di realizzare una notevole «economia di pensiero» e, al contempo, mirava ad ampliare le applicazioni.

Un altro punto di riferimento dei bourbakisti è costituito, negli anni trenta, dalle ricerche concernenti spazi metrici e topologici (cf. ciò che è detto piú oltre). Testi allora fondamentali, come per esempio *Les espaces abstraits* (1928) di MAURICE FRÉCHET (1878-1973), avevano enucleato interessanti proprietà di questo altro tipo di «strutture», anche se parevano ai bourbakisti «estremamente disordinati». Si trattava dunque di scegliere le strutture piú adeguate e importanti per ricostruire su base sistematica e rigorosa «l'architettura delle matematiche», anzi *della matematica*, intesa cioè come un sapere fondamentalmente unitario, secondo quelli che erano stati già gli auspici di Hilbert.

La messa a punto di «strutture-madri» e lo studio della loro compatibilità (in particolare: strutture «algebriche», «topologiche», «d'ordine») ha permesso a Bourbaki la ristrutturazione di non pochi settori della matematica: teoria dagli insiemi (come premessa essenziale), algebra, algebra lineare e multilineare, topologia generale, spazi vettoriali topologici, algebra omologica, algebra commutativa, algebra non commutativa, gruppi di Lie, integrazione, varietà differenziabili, geometria riemanniana, topologia differenziale, analisi armonica, equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali, geometria «analitica» (nel senso delle varietà analitiche, cf. piú oltre). Non importa qui continuare nell'elenco: il lettore che abbia qualche conoscenza matematica vi avrà riconosciuto «strumenti» essenziali che hanno consentito alcune delle svolte piú interessanti in problemi aperti di topologia, geometria algebrica, teoria dei numeri, analisi, fisica matematica e probabilità, ecc. Cioè quegli «strumenti» che permettono di procedere *di fatto* lungo vie come quelle indicate a suo tempo da Hilbert nel 1900. Naturalmente l'opera di Bourbaki – che quindi non mira a sistemare e rifondare teorie matematiche in crescita, quanto piuttosto è rivolta a teorie sufficientemente articolate e, in un certo qual senso, già compiute – non poteva che influenzare lo stile espositivo di non pochi matematici e produrre notevoli cambiamen-


ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

1212

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

PAR

N. BOURBAKI

XVII

PREMIÈRE PARTIE

LES STRUCTURES FONDAMENTALES DE L'ANALYSE

LIVRE I

THÉORIE DES ENSEMBLES

CHAPITRE I

DESCRIPTION DE LA MATHÉMATIQUE FORMELLE

CHAPITRE II

THÉORIE DES ENSEMBLES

PARIS

N & Cie, ÉDITEURS

6, Rue de la Sorbonne, 6

1954

Il volume iniziale degli Éléments de mathématique *di N. Bourbaki (Paris 1954).*

ti nello stesso insegnamento superiore. (Va altresí aggiunto che in un secondo tempo i bourbakisti hanno affiancato agli *Eléments* un *Séminaire* inteso alla discussione di temi e problemi «avanzati»). Né sono mancate, specie in tempi recenti, critiche a non pochi aspetti del «bourbakismo»: carattere schematico della tripartizione delle «strutture-madri», poco interesse per le «strutture d'ordine», scarsa sensibilità per settori in crescita della matematica anche a livello degli «strumenti di base», esclusione programmatica degli aspetti «applicativi» e nessuna attenzione a settori tipo «analisi numerica», eccesso di astrazione, concentrazione pressoché esclusiva sulla linearizzazione (proprio quando alcuni tra i piú stimolanti e difficili problemi appaiono di tipo «non lineare»), riduzione drastica del peso della stessa logica formale e attitudine troppo manifestamente «pragmatica» nelle questioni di fondamenti, ecc. Si tratta, come si vede, di rimproveri di varia natura e diversamente motivabili. Ma va detto che non pochi bourbakisti hanno via via mostrato una grande disponibilità a rivedere posizioni iniziali e un'altrettanto grande onestà intellettuale nel confessare i limiti delle sistemazioni progressivamente comparse nei fascicoli degli *Eléments*, proprio alla luce delle esigenze che l'emergenza di nuovi problemi e la riformulazione di vecchi mettevano in primo piano. D'altra parte anche chi è duramente critico verso certi aspetti della didattica della matematica «ispirata» a Bourbaki (non solo nel settore universitario e degli istituti superiori, ma anche – e soprattutto – a livello di scuola media), come, per esempio, sulla contrapposizione radicale di «matematica moderna» o «neomatematica» alla matematica «classica» o «tradizionale» – com'è il caso di René Thom che l'ha definita «un errore filosofico e pedagogico» – tende a scindere eventuali responsabilità dirette di Bourbaki da «mode» che da Bourbaki possono piú o meno legittimamente aver preso le mosse e a riconoscere la funzione orientativa di non poca attività che sotto lo pseudonimo di Nicolas Bourbaki si è svolta.

2. La geometria del Novecento

a) *Trasformazione della «geometria»*

Come già abbiamo accennato (cf. ciò che è detto in precedenza) la geometria era stata considerata, in una tradizione piú che millenaria, come qualificata dai suoi contenuti. Vertente sostanzialmente sulla «quantità continua» (e per questo contrapposta all'aritmetica o alla «scienza del numero in genere», intesa precipuamente come lo studio della «quantità discreta»), la geometria pareva fondarsi su postulati che venivano considerati autoevidenti, in forza dell'aderenza alla realtà del loro oggetto specifico, «lo spazio geometrico». Oggi si è ben consapevoli come una locuzione del genere sia tutt'altro che univoca, precisa e non ambigua. Sappiamo anche che ai grandi rivolgimenti del pensiero geometrico dell'Ottocento (dibattito sulla natura e la portata della geometria proiettiva reale e complessa, giustificazione delle geometrie non-euclidee, emergenza del punto di vista di Riemann, ecc.) si deve la distruzione di quella immagine millenaria.

La comparsa di dottrine geometriche – ineccepibili dal punto di vista logico quanto lo era la geometria di Euclide – che trattavano di enti con lo stesso nome di quelli classici (cioè di «punti», «rette», «piani», ecc.) ma non aventi le stesse proprietà attribuite ai vecchi enti della geometria classica – ha imposto quindi ai matematici – e non senza delle resistenze – una concezione radicalmente nuova della geometria medesima. Ogni teoria geometrica viene ora intesa come «sistema ipotetico-deduttivo» (l'espressione per la geometria risale a un brillante allievo di Peano, M. Pieri, 1860-1913), cioè come il sistema in cui le proposizioni iniziali non sono accettate in forza dei contenuti, ma semplicemente «come ipotesi», da cui verranno dedotte le dovute conseguenze. La rispondenza di siffatta dottrina alla vecchia immagine della geometria è data da un certo tradizionalismo, da assonanze verbali, ma soprattutto dalla necessità di descrivere ancora con una certa coerenza le manipolazioni che l'uomo fa sugli oggetti fisici del mondo esterno. In questo ordine di idee già Hermann von Helmholtz (1821-1894) aveva formulato un sistema di «proposizioni primitive» che accentuavano l'aspetto tipicamente operativo della geometria; da parte sua, nel suo celebre «Programma di Erlangen» (1872), Felix Klein (1894-1925) aveva classificato le varie branche della geometria mediante un concetto algebrico che doveva rilevarsi fondamentale nei decenni successivi: il concetto di *gruppo*, inteso in particolare nella sua concreta realizzazione di un *gruppo* di trasformazioni.

Per riassumere brevemente la situazione: si può anche dire che la geometria classica, nel senso abituale del termine, era finita nel momento in cui nascevano le varie «geometrie-non» (come la geometria *non*-euclidea e le altre che le fanno seguito: a livello di sistemazione assiomatica della geometria elementare i *Fondamenti della geometria* di Hilbert sono a questo proposito esemplari: ogni «dimostrazione di indipendenza» di un assioma dagli altri del sistema hilbertiano esibisce la possibilità della corrispondente «geometria-non»). Resta però la questione della rappresentazione delle nostre manipolazioni degli enti fisici nello spazio «in cui viviamo» (un problema che, tra l'altro, viene dibattuto ampiamente, anche nei suoi risvolti filosofici, nel primo decennio del secolo, per esempio dal francese Poincaré e dall'italiano Enriques). E, come rileva Poincaré in una conferenza relativa al «Ruolo dell'intuizione e della logica» nello stesso Congresso (1900) in cui Hilbert espone i suoi «problemi matematici», il linguaggio geometrico non perde affatto la sua forza suggestiva e la sua capacità euristica. Anzi resta una preziosa guida là dove la sola «analisi» sarebbe insufficiente a evitare che il ricercatore si smarrisca in un labirinto di nozioni magari definite in modo rigorosissimo ma troppo poco «intuitive». Lo stesso ruolo che spazi metrici e topologici rivestono nella analisi funzionale del Novecento (cf. piú oltre, p. 264) può essere visto come una conferma del giudizio di Poincaré. Del resto questi non faceva che mettere in evidenza il fatto, ben noto, che l'attività logica della mente umana ben difficilmente può essere separata dalla immaginazione, anche se essa può venir rigorosamente distinta da questa.


R. UNIVERSITÀ DI ROMA

FEDERIGO ENRIQUES

LEZIONI

SULLA

TEORIA DELLE SUPERFICIE ALGEBRICHE

RACCOLTE DAL

Dott. LUIGI CAMPEDELLI

PARTE PRIMA

CEDAM

CASA EDITRICE DOTT. ANTONIO MILANI

GIÀ LITOTIPO - PADOVA 1932 X

Frontespizio dell'opera Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche *di F. Enriques* (*Padova 1932*).

b) *Alcune vicende della geometria algebrica. Il programma della «scuola italiana» e qualche sviluppo successivo*

È particolarmente interessante, anche alla luce di quanto detto piú sopra, lo sviluppo di un ramo della geometria che all'inizio del secolo conosce una fioritura rigogliosissima per opera di una grande scuola italiana, quella di Corrado Segre (1862-1924), Eugenio Bertini (1846-1933), Guido Castelnuovo (1865-1952), Federigo Enriques, Francesco Severi (1879-1961), Beniamino Segre (1903-1977). Si tratta della «geometria algebrica». Il termine veniva in origine riferito a quelle ricerche che, fin dai tempi di R. Descartes e P. Fermat, utilizzavano in geometria nozioni di carattere algebrico; ma alla fine dell'Ottocento significava piuttosto lo studio dei cosiddetti «invarianti algebrici» e delle trasformazioni dette «birazionali».

Le ricerche trainanti – sia della «scuola italiana» sia di ricercatori di altri Paesi – movevano sostanzialmente dalle innovazioni promosse da Bernhard Riemann (1826-1866). Nella teoria delle funzioni complesse questi aveva esplicitato, fin dal 1857, la nozione di funzione «multiforme» o «polidroma» e aveva rappresentato le funzioni multiformi con quelle che dovevano restare note come «superfici di Riemann». Aveva quindi enucleato la nozione di corrispondenza «birazionale» tra due curve algebriche, caratterizzate dal fatto che le coordinate del punto mobile dell'una risultavano funzione *razionale* delle coordinate del punto mobile dell'altra. Già nel 1863 Luigi Cremona (1830-1903) aveva esteso la teoria alle trasformazioni algebriche e biunivoche (dette poi «cremoniane»), e poco dopo Bertini si era programmaticamente proposto lo studio di quelle proprietà degli enti geometrici che non vengono alterate dalle trasformazioni cremoniane. La teoria degli «invarianti algebrici» aveva cosí conosciuto il suo fulgore sul finire dell'Ottocento (vanno almeno ricordati, dal 1885 al 1893, alcuni fondamentali lavori di Hilbert, che a parte notevolissimi risultati specifici, miravano programmaticamente a mostrare come «la teoria degli invarianti algebrici si ordinasse immediatamente sotto la teoria generale dei corpi di funzioni algebriche», rivelando come la sistemazione algebrica di non poche «strutture» essenziali costituisse ormai uno strumento prezioso nello sviluppo e nella trasformazione stessa della disciplina). NIELS HENRIK ABEL (1802-1829) e Riemann avevano incentrato alcune loro ricerche sulle funzioni trascendenti collegate con l'operazione di integrazione delle funzioni algebriche (i cosiddetti «integrali abeliani»). Una vigorosa branca dell'analisi complessa era nata e aveva prosperato in questa direzione. Tuttavia la maggior parte delle trattazioni concerneva le funzioni algebriche di *una* variabile, cioè quelle che, nella nomenclatura geometrica convenzionale, vengono appunto designate come «curve algebriche». Era stato soprattutto grazie all'opera di CHARLES ÉMILE PICARD (1856-1941) che tale problematica si era venuta estendendo alle funzioni algebriche di *piú* variabili e agli integrali di queste; in altra direzione ALEXANDER VON BRILL (1842-1935) e MAX NOETHER (1844-1921) avevano sviluppato una metodologia consistente nell'utilizzare il piú possibile strumenti puramente algebrici e non trascendenti per lo studio di tali funzioni. La dicotomia algebrico/trascendente è destinata a percorrere gran parte della geometria algebrica del Novecento.

Fin dai primi anni del secolo è la «scuola italiana», di cui già si è detto, che domina la scena. Nel solco della tradizione aperta da Cremona – che può a buon diritto venirne considerato il precursore e nei metodi e nell'impianto dottrinale – i geometri italiani sviluppano ampiamente la teoria delle superfici algebriche e dei loro invarianti birazionali e quella dell'esistenza delle funzioni implicite algebriche *di piú di una* variabile, teoria che ancor oggi presenta non pochi problemi aperti e che quindi attrae ancora non pochi ricercatori, anche fuori d'Italia. Del prestigio della scuola italiana testimoniano – nel 1906 – i due articoli dedicati alle superfici algebriche scritti in collaborazione da Castelnuovo ed Enriques per l'*Encyklopädie*. I fecondi rapporti tra la scuola italiana e quelle straniere sono del resto confermati dai lavori di Francesco Severi (pubblicati a partire dal 1905) diretti a chiarire i legami tra il punto di vista algebrico-geometrico degli italiani e il punto di vista trascendente, perseguito, soprattutto sulla scia dei lavori di Picard, dai geometri d'Oltralpe, in particolare francesi.

Una peculiarità della «scuola italiana» è l'impiego di metodi «geometrici puri», come proiezioni o intersezioni di curve e superfici nello spazio proiettivo, che fanno il minor riferimento possibile a metodi trattati dall'analisi, dalla topologia o dalla stessa «algebra astratta». Sul lungo periodo proprio questo appello quasi sistematico alla «intuizione del geometra» è stato considerato un limite della «scuola italiana»: l'affinamento degli strumenti algebrici – cui si è accennato a p. 253, in particolare – fa sentire la sua influenza su quei ricercatori che si preoccupano di dare alla «geometria algebrica» una veste tipicamente *algebrica* nel senso moderno della parola. Tale preoccupazione era già stata centrale nelle ricerche promosse dal berlinese LEOPOLD KRONECKER (1823-1891) nella seconda metà dell'Ottocento: riemerge, già negli anni venti del Novecento, in numerosi matematici, in parte motivati dal successo della impostazione hilbertiana. È in questo contesto che vengono mosse le prime critiche all'impostazione «puramente geometrica degli italiani»: ha scritto per esempio B.L. van der Waerden che proprio tale approccio costruisce «un mirabile edificio, la cui base logica resta però instabile; nozioni non ben definite, dimostrazioni insoddisfacenti». Questa critica è divenuta abbastanza comune, anche tra ricercatori che sono stati notevolmente influenzati dal pensiero di un Castelnuovo, di un Enriques, di un Severi, ecc. Ma va detto che, attualmente, il giudizio sulla «scuola italiana» viene da molte parti rivisto: geometri di varie tendenze e Paesi tendono sempre di piú a rivalutare il profondo valore euristico delle «intuizioni» degli italiani.

È impossibile in questa sede delineare, se pur in modo sommario, gli sviluppi della geometria algebrica novecentesca. Tuttavia ci pare significativo accennare qui almeno a due aspetti:

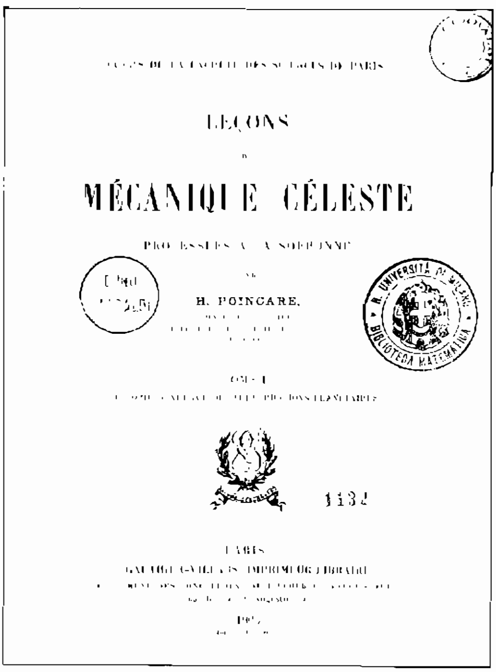
1. Il rinnovamento costituito dalla «teoria di Hodge» – Nella geometria algebrica confluiscono spunti e nozioni, come quella di «varietà differenziabile», che solo l'approccio assiomatico del Novecento ha esplicitato, ma che sono impliciti già nei pionieristici lavori di G.F. Gauss (1777-1855) e di B. Riemann. Già l'italiano Eugenio Beltrami (1835-1900) aveva del resto indicato la possibilità di definire su una varietà dotata di opportuna struttura un operatore che generalizzava il classico «operatore di Laplace» familiare nella trattazione del «problema di Dirichlet», e che permette quindi di definire, analogamente a tale classico caso, delle funzioni armoniche su tale varietà. A partire dal 1930, William Hodge (n. 1903) definisce analogamente per varietà «riemanniane compatte» la nozione di forma differenziale esterna armonica, pervenendo cosí a un'ampia generalizzazione di risultati riemanniani. Il passo compiuto da Hodge è per molti versi un tipico momento di crescita del pensiero matematico: com'è noto, nello sviluppo della sua teoria Riemann aveva utilizzato come «principio euristico» (la terminologia è di Klein) un principio noto nella letteratura specializzata come «principio di Dirichlet», contro il cui uso già nel 1870 il rigorosissimo Karl Weierstrass (1826-1897) aveva mosso alcune fondate obiezioni. Come esse siano state «aggirate» nel caso classico è uno dei capitoli piú affascinanti dell'analisi (cf. quanto è detto piú oltre); ma è proprio lo sviluppo raggiunto dalla teoria delle equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico che risparmia a Hodge le difficoltà incontrate a suo tempo da Riemann e mostra che l'impiego di una versione «corretta» del «principio di Dirichlet» è piú di un semplice artificio.

2. Sviluppi della geometria algebrica astratta. L'approccio di Weil e di Zariski – Come già si è accennato, sul finire degli anni venti e negli anni trenta del Novecento già ha preso corpo un programma di «geometria algebrica classica» che muove dalla considerazione che i coefficienti delle equazioni algebriche e le coordinate dei punti appartengono nel caso piú generale a un *corpo qualsiasi* e sfrutta quindi sistematicamente gli strumenti offerti dall'«algebra moderna». Come ha scritto retrospettivamente Jean Dieudonné: «Dal momento che, apparentemente, una gran parte dei fondamenti della geometria algebrica classica sembrano provenire dall'intuizione geometrica, piú o meno giustificata da un appello all'analisi e alla topologia, una disamina dei concetti-base, dal punto di vista della pura algebra, era il primo passo necessario per sviluppare l'ambizioso programma di una geometria su un corpo qualsiasi». Iniziato fin dagli anni venti e proseguito negli anni trenta da E. Noether, Wolfgang Krull (1899-1970), B.L. van der Waerden, ecc., esso verrà ripreso, sostanzialmente a partire dagli anni quaranta, e anche notevolmente rimodellato, da A. WEIL (n. 1880) e OSCAR ZARISKI (n. 1899). Weil è, agli inizi delle sue ricerche, profondamente motivato da problemi di teoria dei numeri: egli sviluppa, quindi, un'ampia revisione della geometria algebrica riemanniana e postriemanniana riprendendo un'idea già degli algebristi degli anni venti, in particolare di EMIL ARTIN (1898-1962), di estendere la teoria classica della *funzione zeta* di Riemann e di altre funzioni: le versioni elaborate da Weil non piú «in caratteristica zero», ma «in caratteristica *p*», con *p* primo si tramutano a loro volta in uno stimolante programma di ricerca. Quanto a Zariski, questi a partire dal 1937 sviluppa un'ampia gamma di ricerca di «geometria algebrica astratta» (nell'accezione piú sopra precisata) nella convinzione che proprio in tale contesto trovino soluzione quei problemi «che hanno la loro origine e motivazione nella geometria» come avevano a suo tempo intuito matematici profondamente creativi come Castelnuovo ed Enriques.

Se si tien conto del fatto che, nel secondo dopoguerra, si è articolata una profonda sintesi degli approcci «algebrici» e «trascendenti» nel contesto della geometria algebrica; che allo studio delle cosiddette «varietà algebriche» – le quali, detto in breve, costituiscono la generalizzazione naturale delle curve e delle superfici algebriche – si è affiancato quello delle «varietà analitiche» – le quali rappresentano un raffinato strumento per trattare i difficili problemi di un nuovo ramo, la teoria delle funzioni *di piú* variabili complesse, emersa già nella seconda metà dell'Ottocento, per esempio con Weierstrass, ma audacemente riproposta negli anni trenta del secolo soprattutto per opera del giapponese K. OKA –; che utili strumenti di sintesi e unificazione provengono dai contemporanei progressi della geometria differenziale, a partire (almeno) dalla considerazione dei fibrati vettoriali su una varietà differenziale (cf. quanto detto dell'opera di Élie Cartan, in particolare a p. 262); che, infine, alcune ricerche variamente motivate – in particolare di J. LERAY, di HENRY CARTAN (n. 1904) e di J.P. SERRE (1827-1898) – hanno permesso di individuare nella cosiddetta «teoria dei fasci» uno strumento particolarmente elegante e fruttuoso per affrontare i punti nodali della geometria «algebrica» (per es. questioni aperte dalla stessa teoria di Hodge) e «analitica» (nel senso precisato poche righe piú sopra), si intuirà la vastità e la profondità dei problemi della geometria algebrica attuale. Va aggiunto che non poche questioni reimpostate da Zariski (per esempio quella dello «scioglimento delle singolarità» ereditata dalla scuola geometrica italiana) hanno ricevuto in tempi recenti soluzioni almeno parziali e che nel contesto di un vasto programma di sintesi dei vari «metodi» di geometria algebrica, promosso principalmente da A. GROTHENDIECK (n. 1928) a partire dal 1957, si sono decise con successo le «congetture di Weil». Si sono cosí enucleati promettenti legami con la teoria dei numeri (del resto era questa, come già si è detto, una motivazione originaria di Weil), ma va aggiunto però che la «classica» ipotesi di Riemann è rimasta non decisa. Va infine ricordato che da motivazioni provenienti in larga parte dalla geometria algebrica (in particolare proprio dall'approccio promosso da Grothendieck) ha preso le mosse, sul finire degli anni sessanta, una profonda rifondazione della stessa logica (Lawvere, M. Tierney, ecc.), che tende a prospettare l'usuale fondazione in termini di teoria degli insiemi come un caso particolare (caso «statico») di una piú generale «teoria degli insiemi variabili». Nel quadro concettuale di tale approccio (teoria delle «categorie» sviluppata in modo autonomo dall'insiemistica tradizionale, teoria dei *topos*, ecc.) si realizza, di nuovo, una notevole «economia di pensiero»: molti teoremi della teoria si ritrovano ad avere un'interpretazione soddisfacente sia come risultati di geometria algebrica che come risultati di logica.

c) *Cenni relativi alla geometria differenziale*

Le considerazioni di Poincaré con cui si è concluso il paragrafo *Trasformazione della «geometria»* bene si adattano allo sviluppo di un altro settore della geometria, non meno importante della geometria algebrica. Vogliamo alludere alla cosiddetta «geometria differenziale». Potentemente stimolata dalle ricerche di Gauss e di Riemann nel secolo scorso, questa disciplina si era progressivamente svincolata dalla limitazione al solo spazio tridimensionale (questo aspetto è ben chiaro già nella riemanniana *Ipotesi che stanno alla base della geometria*, dissertazione del 1854, ma pubblicata postuma nel 1868) e conseguentemente (anche grazie al diffondersi del comodo linguaggio degli «iperspazi» che permetteva notevolissima semplificazione nelle applicazioni alla meccanica, ecc.) aveva posto problemi che, specie sulla scorta delle ricerche classiche di Jean Gaston Darboux (1842-1927) e della scuola francese, trasferivano agli spazi a piú di tre dimensioni (o «iperspazi») la problematica che era giunta a livelli assai elevati e interessanti nel caso dello spazio ordinario. È per merito di Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) che, nei primissimi anni del secolo, il problema viene concettualizzato da un punto di vista che potremmo chiamare *formale-algoritmico*, che doveva permettere non solo fondamentali applicazioni alla fisica matematica, ma anche dare luogo alle estensioni ad altri gruppi di trasformazioni, diversi dai gruppi ortogonali degli spazi *euclidei* e condurre alle geometrie *affini differenziali* e *proiettive differenziali*.

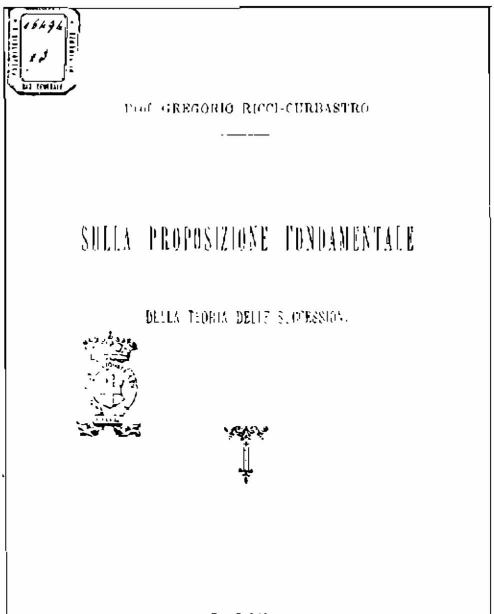

LEÇONS

MÉCANIQUE CÉLESTE

H. POINCARÉ.

Le Leçons de mécanique céleste *di H. Poincaré (Paris 1905). Un'opera classica del grande matematico, fisico e filosofo.*

La costruzione del cosiddetto «calcolo tensoriale» (o «calcolo differenziale assoluto» – ad opera, oltre che di Ricci-Curbastro, del suo allievo e collaboratore Tullio Levi-Civita [1873-1941]-) si rivelerà uno strumento prezioso nella formulazione einsteiniana della *relatività generale* (1916). Proprio questo calcolo, infatti, consente di dare alle leggi fisiche una forma indipendente dal particolare sistema di riferimento spazio-temporale prescelto e di precisare l'intima solidarietà fra i fenomeni e lo spazio-tempo ove essi hanno luogo. Come è noto, già nella relatività *speciale* (1905) viene opportunamente «geometrizzato» lo spazio-tempo, sulla base di una rigorosa definizione «operativa» dei concetti fisici di base – in particolare di quello di «simultaneità»; nella relatività generale la formulazione *invariante* delle leggi della gravitazione con linguaggio geometrico è data mediante l'ipotesi che l'Universo sia una varietà quadridimensionale, la cui geometria è concepibile sostanzialmente come una «geometria riemanniana», la struttura della quale va appunto espressa mediante gli strumenti del calcolo «tensoriale» o «assoluto» e ancora mediante l'assunto che la geometria *intrinseca* di questo spazio e, di conseguenza, le sue proprietà «invarianti» (che è come dire, almeno in un certo senso, «obiettive») sono determinate dalla presenza di materia nello spazio stesso. Ne deriva una geometrizzazione dello «spazio fisico»; per meglio dire, si tratta dell'espressione delle leggi della gravitazione universale mediante gli strumenti della geometria riemanniana (senza che venga necessariamente operata alcuna confusione tra il concetto di esperimento spaziale e di successione temporale). Il miglior riconoscimento del ruolo svolto dal calcolo assoluto è, del resto, quello dello stesso ALBERT EINSTEIN (1879-1955): le equazioni gravitazionali della relatività «costituiscono un vero trionfo dei calcoli creati da Ricci».


Prof. GREGORIO RICCI-CURBASTRO

SULLA PROPOSIZIONE FONDAMENTALE

DELLA TEORIA DELLE SUCCESSIONI

PADOVA
TIPOGRAFIA GIOV. BATT. RANDI
1915

Frontespizio del saggio Sulla proposizione fondamentale della teoria delle successioni *di G. Ricci-Curbastro (Padova 1915).*

Ma il particolare atteggiamento epistemologico che fa sí che un fisico esplicitamente identifichi la ricerca della «obiettività» nelle espressioni di relazioni geometriche «invarianti» rispetto ad un determinato gruppo di trasformazioni, deve perlomeno risalire a Felix Klein. A sua volta questo tipo di «filosofia», migrato dalla matematica alla fisica, retroagisce, in concomitanza con la progressiva affermazione del punto di vista einsteiniano, sulla matematica stessa: le numerose generalizzazioni della geometria differenziale – cui in breve si è accennato qualche riga piú sopra – potrebbero sostanzialmente venir descritte osservando che esse riguardano gli strumenti algoritmici idonei a garantire la «obiettività» delle relazioni geometriche – e quindi delle leggi – che vengono via via formulate di fronte ai cambiamenti che si ritengono «leciti», a seconda che si adottino via via gruppi piú ampi del gruppo delle trasformazioni ortogonali.

Si potrebbe anche affermare che l'impulso a non poche delle ricerche testé riferite è stato dato, da una parte, dall'esigenza di manovrare in modo compatto e «leggibile» gli sviluppi, a volte estremamente pesanti, della geometria differenziale come era stata presentata da Riemann; dall'altra parte, dalle nuove idee che penetravano progressivamente nella geometria – e piú in generale nella matematica – con il punto di vista «gruppale» introdotto da Klein e sviluppato tecnicamente nelle imponenti ricerche di Sophus Lie (1842-1899) che stanno alla base di non poche geniali soluzioni «fisiche» proposte dallo stesso Poincaré ai primi del secolo.

Va infine notato, proprio usando le parole di Élie Cartan, che in origine «la nozione di gruppo sembra essere completamente assente dalla geometria riemanniana». È proprio a Élie Cartan (1869-1951) – che è, tra l'altro, uno dei grandi artefici, nei primi vent'anni del secolo, della sistemazione moderna del cosiddetto «calcolo delle forme differenziali esterne» – che si deve, con la sua teoria degli «spazi generalizzati», una profonda fusione dei punti di vista che potremmo etichettare «riemanniano» e «kleiniano». Detto in modo sommario, è la considerazione di spazi quozienti di gruppi di Lie che permette di ottenere non poche «varietà» che includono spazi ormai classici e comunque rilevanti per la modellizzazione fisica.

Questo impetuoso sviluppo della teoria dei gruppi di Lie e la progressiva messa a fuoco di «un concetto cosí arduo da definire con precisione» (sono parole di Cartan) come quello di varietà differenziabile che riprende fondamentali intuizioni riemanniane, permettono un'interessante estensione dello stesso punto di vista di Ricci-Curbastro. Il suo «calcolo assoluto» si era rivelato, infatti, uno strumento molto potente, ma restava inadeguato per uno studio dei problemi «globali». Proprio nel contesto delle ricerche di Cartan è emerso chiaramente il fatto che, quando una varietà presenta una «struttura differenziabile» si possono «localmente» applicare i metodi dell'algebra lineare e multilineare. È in quest'ottica che Cartan (con il suo metodo «del riferimento mobile») ha sviluppato lo studio del *fibrato tangente* e *fibrato tensoriale* per una varietà, riconnettendo la teoria dei fibrati alla stessa nozione di gruppo di Lie. Si tratta di un quadro concettuale preziosissimo non solo per la fisica matematica (si pensi agli sviluppi da una parte della meccanica quantistica, dall'altra a quelli del programma einsteiniano di una teoria «del campo unificato», che sia in grado cioè di *unificare* le interazioni fondamentali di cui la fisica si occupa), ma, in prospettiva, per la stessa matematica (cf. del resto quanto detto a proposito della teoria di Hodge nel paragrafo precedente).

d) *Brevissimi cenni su altri settori della ricerca geometrica*

Naturalmente questi brevi e schematici riferimenti sono ben lontani dall'esaurire la problematica della geometria del nostro secolo! A mostrare ciò, sarà sufficiente la menzione delle cosiddette «geometrie finite». Con una caratterizzazione un po' riduttiva, si potrebbe dire che questa branca della matematica consiste sostanzialmente di strutture algebriche presentate con linguaggio geometrico, nei limiti in cui cosiffatta operazione è possibile (il che è giustificato dalla *analogia* delle proprietà che vengono considerate con alcune che tradizionalmente competono agli oggetti «classici» della geometria).

Ci sia lecito ancora esprimere due considerazioni. La prima prende spunto da quest'ultimo riferimento per ricollegarsi alle osservazioni già fatte circa l'*immaginazione* e la *logica* e il loro rapporto come di facoltà mentali distinte ma difficilmente separabili, almeno nella effettiva pratica della ricerca geometrica. In questo ordine di idee, ancora una volta, si rivela feconda la loro interazione. Il reciproco sviluppo di entrambe, infatti, ha portato, almeno sul lungo periodo, all'articolazione di tutte e due i punti di vista: da una parte quello «algebrico», che fornisce la struttura portante, per cosí dire, di impostazioni assiomatiche e deduzioni rigorose; dall'altra quello piú tipicamente «geometrico» che dà i modi di espressione per analogia e per traslato e, ancora, un supporto, ben piú difficile da analizzare e da valutare, che è quello della suggestione fantastica, della intuizione delle relazioni, dello stimolo creativo; in una parola, dell'*euristica* che si articola spesso per analogia e/o per contrasto (come del resto accade in altre attività «creative» dell'ingegno umano).

La seconda osservazione concerne quanto si è detto circa i vari tentativi di «globalizzazione»: il termine che viene spesso usato al posto di «geometria globale» degli enti via via considerati è talvolta quello di «geometria integrale». Esso potrebbe far pensare a una specie di contrapposizione tra strumenti della geometria differenziale classica e questa geometria «globale». Ora, se anche questa suggestione non è priva di un qualche contenuto di verità, va detto che l'interesse principale del punto di vista «integrale» sta nella messa a punto di quelle proprietà che sono possedute dagli enti della geometria, in forza, appunto, della loro globalità. Come altre «coppie» concettuali della matematica (quali finito-infinito, continuo-discontinuo, continuo-discreto, come del resto avremo modo di vedere nel seguito), anche per locale-globale ciascun termine si riferisce a un punto di vista che non solo si contrappone, ma anche *completa* il punto di vista espresso dall'altro termine della coppia.

3. L'analisi funzionale e il rinnovamento della ricerca analitica

a) *Caratteri generali*

DESCARTES (1596-1650) nei suoi *Principia Philosophiae* (1644) aveva affermato che sappiamo che le *ipotesi* che guidano la ricerca scientifica sono corrette quando possiamo da esse «dedurre tutte le altre piú particolari, alle quali non avevamo badato». LEIBNIZ (1646-1716) da parte sua soleva sostenere (1678) che «la maggior garanzia di un'ipotesi (...) è che con il suo aiuto si possono fare predizioni anche intorno a fenomeni ed esperimenti non previsti». Nel pensiero occidentale, almeno, è comune a tradizioni intellettuali, per molti aspetti piuttosto differenti, l'abbinamento di quello che i filosofi della scienza chiamano il potere *esplicativo* di un'ipotesi con il suo potere *predittivo*. Senza dubbio, furono la formulazione della meccanica newtoniana e il corrispondente sviluppo dell'analisi di Newton e Leibniz a far rifiorire il calcolo preventivo degli eventi naturali e con esso la fiducia nel «valore della scienza». NEWTON (1642-1727) aveva espresso le sue leggi del moto e della gravitazione come equazioni differenziali; LAPLACE (1749-1827) agli inizi dell'Ottocento (1814) aveva enunciato un grandioso programma in cui tutta la conoscenza della realtà veniva modellata sul determinismo della meccanica celeste: anche «la curva descritta da una semplice molecola di aria o di vapore, è regolata con la stessa certezza delle orbite planetarie».

Problemi di meccanica e di astronomia che per tutto il corso dell'Ottocento costituiscono un banco di prova per l'analisi matematica (in particolare tali questioni si traducono in equazioni o sistemi differenziali, sia ordinari che alle derivate parziali): ma si vengono via via aggiungendo tutti quei problemi che provengono dagli sviluppi della fisica teorica: calore, elasticità, idrodinamica, ottica, elettromagnetismo. Nel Novecento, infine, relatività e meccanica quantistica si affiancano come fonti di rilevantissime questioni.

Ora, si potrebbe dire che i compiti dell'analisi matematica erano già stati delineati nel 1822, all'inizio di quel «poema matematico» che è la *Théorie analytique de la chaleur*, dal grande JOSEPH FOURIER (1768-1830) con queste parole: «Se i corpi sono collocati lontano da noi, nell'immensità dello spazio e se l'uomo vuole conoscere lo spettacolo dei cieli in epoche distanti un gran numero di secoli (...) è l'analisi matematica che può enunciare le leggi di questi fenomeni, rendendoceli presenti e misurabili».

Infatti: caratterizzazioni di questo tipo già adombrano l'idea generale di quello che oggi siamo soliti chiamare un «modello matematico» (si noti che il termine *modello* è qui usato in una accezione e in un contesto diverso che alle successive pp. 293 ss.): un certo insieme di relazioni (algebriche, differenziali, integrali, ecc.) viene ritenuto rappresentativo dei fenomeni presi in considerazione e, detto in breve, fornisce numeri da mettere in confronto coi dati empirici, non «bruti», ma filtrati attraverso procedimenti di misurazione piú o meno sofisticati. Ora, la prospettiva che già era espressa dalle parole di Fourier resterebbe semplicemente un «pio desiderio», se l'analisi matematica non fosse in grado, di fatto, di concettualizzare e risolvere le difficoltà insite nei vari tipi di equazioni usate per rappresentare matematicamente i fenomeni. Va subito detto che alle equazioni differenziali e alle derivate parziali, il cui studio era cominciato già nel Settecento, si erano aggiunte con l'Ottocento (specie nella seconda metà del secolo) equazioni integrali, poi equazioni integro-differenziali e infine numerosi altri tipi di equazioni «funzionali», in cui cioè le incognite sono delle *funzioni* (questo punto di vista piú generale era del resto emerso in concomitanza con l'esplicitazione di una nozione sufficientemente generale e rigorosa di *funzione*).

Seguendo uno schema proposto da Jean Dieudonné (in J. Dieudonné et al., *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900*, Hermann, Paris 1978, vol. II, pp. 115-116), possiamo riassumere le grandi idee generali destinate a strutturare la ricerca nel nostro secolo, nei seguenti punti. 1) Alla ricerca della «soluzione generale» di una equazione «funzionale» si viene sostituendo, in parte per l'influenza delle applicazioni fisiche, lo studio delle soluzioni sottoposte a condizioni ulteriori («condizioni iniziali», «condizioni al contorno», ecc.): la tendenza era del resto già emersa con Cauchy (1789-1857). 2) Già nei lavori di quest'ultimo si era enucleata la distinzione tra proprietà *locali* e proprietà *globali* delle equazioni e delle loro soluzioni (delle quali esistono notevoli esempi). La coppia locale-globale non solo si è rivelata fondamentale, del resto, nel contesto delle equazioni, ma attraversa sostanzialmente tutta l'architettura delle matematiche (cf. quanto detto precedentemente, a p. 248). 3) La nozione di equazione, come concetto-base, è destinata a cedere sempre piú spazio al concetto di *funzionale* e a quello di *operatore*, analogamente alla storia parallela che si produce tra Ottocento e Novecento nell'algebra lineare, ove il ruolo preponderante viene via via assunto dalla nozione di *matrice* e poi da quella di *applicazione lineare*. 4) Nonostante qualche resistenza psicologica, ci si abitua progressivamente all'idea che si debbono trattare le funzioni come oggetti «primitivi», cioè come «punti di uno spazio», e con il diffondersi del linguaggio della teoria degli insiemi (cf. anche quanto detto alle pp. 287 ss.) diventa sistematica la considerazione di «insiemi» i cui «elementi» sono delle funzioni (cf. quanto detto piú oltre sugli «spazi funzionali», pp. 268 e 269). 5) Infine «il carattere "dinamico" dell'analisi (in contrasto con la contemplazione "statica" delle forme, ereditata dall'antichità) che già aveva dato origine al calcolo infinitesimale, si accentua e si diversifica in tutte le direzioni, notoriamente grazie all'influenza di due matematici, Riemann e Poincaré, che si potrebbero chiamare gli apostoli della *va-*

riazione continua. Ora quel che varia non sono però piú solo dei numeri, ma anche delle funzioni, considerate appunto come "punti" di uno "spazio funzionale". Sul finire dell'Ottocento si impone la distinzione di differenti tipi di "convergenza" di una successione di funzioni verso una funzione-limite, e proprio questo condurrà all'idea generale di *topologia* su un insieme di funzioni e, per estensione, darà origine alla topologia generale» (J. Dieudonné, *op. cit.*, p. 116).

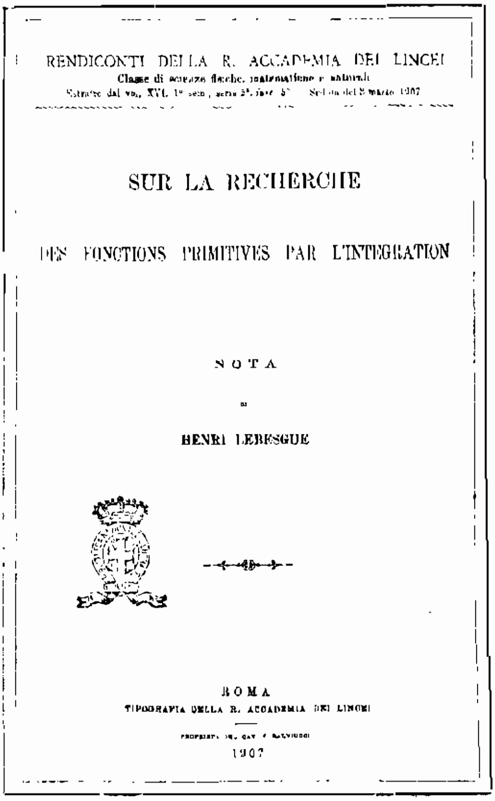
b) *Il classico problema delle aree e dei volumi. Dalla teoria di Lebesgue a quella di Haar*

Prima però di esaminare come l'analisi nel nostro secolo abbia saputo sfruttare l'eredità dell'Ottocento secondo le linee di ricerca che abbiamo enucleato, ci pare opportuno delineare qualcuno degli sviluppi che hanno avuto nel nostro secolo uno dei piú tradizionali problemi della matematica, *quello della definizione e del calcolo delle aree e dei volumi,* le cui origini indubbiamente affondano nelle motivazioni empiriche che hanno portato alla costituzione della stessa geometria antica.

Le nozioni di *lunghezza*, *area* e *volume* presso i Greci erano del resto fondate sulla loro invarianza rispetto a spostamenti. Euclide, negli *Elementi,* è di chiarezza esemplare quando tra le «nozioni comuni» include l'assioma che «cose che *coincidono* fra loro, sono fra loro uguali». Del resto «è grazie a un uso geniale di questo principio che vengono ottenute [dai matematici greci] tutte le formule che danno le aree o i volumi delle "figure" classiche (poligoni, coniche, poliedri, sfere), ora mediante procedimenti di scomposizione finita, ora mediante "esaustione". Con linguaggio moderno, si potrebbe dire che quel che fanno i geometri greci consiste nel dimostrare l'esistenza di "funzioni di insiemi" additive e invarianti per spostamenti, ma definite per insiemi di un tipo particolarissimo» (N. Bourbaki). La teoria degli indivisibili promossa nella prima metà del Seicento, il calcolo integrale strutturato da Newton, da Leibniz, dai Bernoulli, ecc., le successive definizioni rigorose della nozione di integrale possono venire tutte prospettate come risposte all'esigenza di *ampliare* quella ristrettissima famiglia di insiemi per cui pareva lecito *definire* una misura.

Sul finire dell'Ottocento non erano mancate ulteriori proposte in questa direzione, specie in connessione con la questione della trattazione degli *integrali multipli* (A. Harnack, R. Bettazzi, C. Arzelà, E. Picard, ecc.); nel 1892 Camille Jordan (1838-1922) aveva dato una presentazione sistematica di questi tentativi collocando la teoria della integrazione «secondo Riemann» nel contesto della teoria degli insiemi di punti e, in funzione dell'approccio al problema degli integrali doppi, aveva sviluppato quella teoria della misura che porta ancor oggi il suo nome (in alcuni testi è anche nota come «misura di Peano-Jordan», in memoria dei contributi peaniani in questa stessa direzione). Il programma di Jordan aveva però incontrato, proprio nella questione degli integrali doppi, non poche difficoltà. Nel 1898 Édouard Borel (1871-1956) aveva enucleato assiomaticamente le proprietà «desiderabili» di una «misura» e ne aveva fatto uso per individuare «la famiglia degli insiemi che si devono considerare misurabili», sviluppando una revisione sia delle idee di Jordan che della nozione, dovuta a Georg Cantor (1845-1918), di «contenuto» di un insieme, pervenendo cosí alla cosiddetta «misura di Borel».

Ma su tutte le varie proposte che promettono di soddisfare i *desiderata* intuitivi, si impone agli inizi del Novecento, come piú feconda ed utile per estensioni ed applicazioni, quella di Henri Léon Lebesgue (1875-1941), cui si deve, tra l'altro, una svolta deci-



RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

SUR LA RECHERCHE

DES FONCTIONS PRIMITIVES PAR L'INTÉGRATION

NOTA

DI

HENRI LEBESGUE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

1907

L'opera Sur la recherche des fonctions primitives par l'intégration *di H. Lebesgue (Roma 1907).*

siva proprio nella definizione del concetto di integrale di una funzione.

Nel 1902 comparve sugli *Annali di matematica* la tesi *Integral, longueur, aire* in cui Lebesgue rielaborava cinque precedenti comunicazioni (1899-1901), motivate da questioni di natura geometrica, in particolare «dal problema della misura delle superfici». Lebesgue adottava anch'egli l'approccio assiomatico, formulava in termini astratti quali dovevano essere i requisiti di una «misura», forniva il procedimento per la costruzione della misura per la retta e il piano euclidei. Passava, quindi, alla definizione di una funzione «misurabile» su un insieme misurabile e presentava appunto quella nozione di integrale destinata a diventare universalmente nota come «integrale di Lebesgue».

Non è possibile in questa sede dare una presentazione, anche approssimativa, dei concetti, strettamente legati, di *integrale di Lebesgue* e di *misura di Lebesgue*, né tanto meno tracciare un confronto tra le idee di Lebesgue e quelle dei suoi predecessori. Basterà dire che la teoria di Lebesgue in un certo senso conclude una tradizione di ricerca spregiudicatamente inaugurata da BONAVENTURA CAVALIERI (1598-1647) con la sua «geometria degli indivisibili» pervenendo sostanzialmente alla definizione rigorosa del concetto di area di una figura compresa tra confini non tutti rettilinei. Se gli sviluppi della nozione di integrale promossi da Cauchy e da Riemann nel secolo scorso avevano permesso di rendere a un tempo generali e rigorosi certi geniali procedimenti che già Archimede aveva escogitato e utilizzato nel calcolo delle aree e dei volumi di certe figure particolarmente semplici ma importanti della geometria, l'impostazione data da Lebesgue nel definire cosa intendere per area di una figura a contorno curvilineo e nel relativo calcolo, è molto piú generale di quella dei matematici precedenti e la include come caso particolare. In breve: la teoria di Lebesgue consente di definire una operazione che associa a una funzione definita su un intervallo un numero (appunto l'«integrale» della funzione su quell'intervallo) che ha il significato geometrico già ricordato nei casi semplici, ma che può venir definito anche nei casi in cui la definizione classica non può piú essere utilizzata.

Una brevissima ricostruzione di alcuni sviluppi del punto di vista promosso da Lebesgue può essere per piú versi interessante. Dal 1902 al 1904 Lebesgue affrontò il problema della corrispondenza tra integrale definito e funzione primitiva, approfondendo cosí quello che è uno dei nuclei centrali del calcolo infinitesimale; dimostrò il teorema detto «di decomposizione» per le cosiddette «funzioni a variazione limitata» (il termine è dovuto a Jordan); trovò una caratterizzazione delle funzioni dette «assolutamente continue» da GIUSEPPE VITALI (1875-1932); nel 1906 riprese la tematica, iniziata nel 1903, dell'applicazione del suo integrale alla teoria delle serie trigonometriche. Contemporaneamente rilevanti risultati venivano conseguiti in questo settore anche da altri ricercatori, per esempio da PIERRE FATOU (1878-1929). Ma fu soprattutto il teorema sugli integrali doppi, dimostrato nel 1907 da GUIDO FUBINI (1879-1943) che dissipò alcune perplessità, costituendo uno dei piú notevoli successi della «nuova analisi». Dal 1902 al 1910, intanto, alcuni contributi, come quelli di F. RIESZ (1880-1956) e ERNST FISCHER (1875-1959) mettevano in luce i meriti dell'integrale di Lebesgue in varie branche della matematica, mentre nel 1905 Vitali facendo uso dell'assioma di scelta (cf. piú oltre, pp. 292), e sfruttando il fatto che la misura di Lebesgue è invariante per spostamenti, mostrava che esistono infiniti insiemi di numeri reali non misurabili secondo Lebesgue. Nel 1910, nella memoria *Sur l'intégration des fonctions discontinues* Lebesgue perveniva a fondamentali risultati sugli integrali multipli che estendevano noti teoremi per le derivate degli integrali semplici, sfruttando in modo essenziale il «lemma di ricoprimento» trovato da Vitali nel 1905.

L'operazione di definizione dell'integrale data da Lebesgue doveva venir imitata anche da altri, che definirono opportune estensioni; inoltre essa venne in modo naturalissimo estesa anche al caso di funzioni definite su insiemi di punti appartenenti a spazi a piú di una dimensione, giungendo cosí ad acquisire il massimo di generalità ed efficacia. Si assistette cosí, nei primi venticinque anni del secolo, a un duplice processo: da una parte, al potenziamento della teoria delle funzioni di variabile reale che, al congresso internazionale dei matematici tenuto a Roma nel 1908, G. Darboux segnalava come un campo che «attira con forza irresistibile le ricerche dei matematici piú giovani, piú attivi, piú creativi», proprio perché in essa si assisteva a un profondo «riorientamento» in tutta la disciplina; dall'altra, al ruolo che la teoria di Lebesgue viene svolgendo entro la nascente analisi funzionale (come del resto avremo modo di vedere piú in dettaglio in seguito). Né va dimenticato che il concetto di misura ha trovato svariatissime applicazioni nei piú diversi contesti, «straripando» letteralmente dal contesto analitico in cui era emerso. Basterà qui ricordare in particolare il suo ruolo nella sistemazione teorica del calcolo delle probabilità, e soprattutto di quelle probabilità «geometriche» che erano state introdotte in modo intuitivo e non sempre completamente rigoroso.

A conclusione di questo paragrafo va però osservato che la questione della «invarianza per spostamenti», come si è visto, se pure ha svolto un ruolo rilevantissimo nelle varie metamorfosi del classico problema delle aree e dei volumi, non è però al centro delle riflessioni nel periodo «eroico» in cui si affermano la misura di Lebesgue e le sue varie estensioni. Ma parlare di «invarianza per spostamenti» significa ormai, nel quadro delle matematiche del Novecento, situarsi nel contesto della *teoria dei gruppi* che, provenendo dall'algebra, «invade» la topologia e l'analisi, per non dire la fisica teorica. Negli stessi anni (inizio del decennio 1930-1940), in cui in quest'ultimo settore si compie una vera e propria svolta per quanto riguarda i metodi matematici utilizzati (specie in meccanica quantistica, con i lavori di H. Weyl, B.L. van der Waerden, E.P. Wigner, ecc.), si realizza una nuova fusione di punti di vista (per certi versi anticipata da grandi teorie della fine del secolo: teoria degli «invarianti integrali» di E. Cartan e H. Poincaré, per esempio).

La menzione della cosiddetta «misura di Haar» è in questa sede appropriata anche alla luce del punto di vista «per problemi» che abbiamo adottato nei paragrafi introduttivi. Nel 1933 A. Haar – richiamandosi al procedimento di approssimazione di un volume mediante giustapposizione di cubi congruenti di spigolo arbitrariamente piccolo (un procedimento tipico del calcolo integrale classico) – riesce a costruire una misura invariante su un gruppo dotato di date proprietà (localmente compatto e separabile) come «limite» di una successione di misura, ed è grazie a questo strumento che nel 1934 JOHANN LUDWIG VON NEUMANN (1903-1957) riesce a risolvere per i gruppi compatti il V problema di Hilbert (relativo alla caratterizzazione dei gruppi di Lie con proprietà puramente topologiche, prescindendo da qualsiasi struttura differenziale). Senza perdersi qui in ulteriori dettagli andrà ricordato che la costituzione di una «teoria generale della misura di Haar» (ad opera di von Neumann e di A. Weil innanzitutto, verso la fine degli anni trenta) ha consentito di affrontare e risolvere con successo non poche questioni, problemi tipicamente sorti nel contesto della meccanica quantistica come sottilissime questioni di teoria dei numeri.

c) *Aspetti generali dell'«analisi funzionale»*

Si potrebbe dire che uno dei «cammini obbligati» che la matematica segue nel suo sviluppo è quello che tende a potenziare al massimo la generalità dei concetti e la loro applicabilità a problemi specifici. Nel corso dell'Ottocento si era assistito a una evoluzione che aveva portato a una vastissima generalizzazione dei concetti della geometria, con l'introduzione di «spazi» di varia natura e con la trattazione delle proprietà piú diverse, apparentemente lontane dalle proprietà «classiche» che la mentalità elementare attribuiva agli enti della geometria. In particolare la topologia (cioè la *analysis situs* o *geometria situs* prefigurata da un LEIBNIZ, 1646-1716, o da un EULER [it. Eulero] 1707-1783), si era definita nell'ambito della matematica anzitutto come studio delle proprietà delle figure che non variano per trasformazioni continue. Sotto un secondo aspetto si era presentata anche come una sorta, per cosí dire, di «geometria di posizione» generalizzata, come mostra l'esempio classico del «problema dei ponti di Koenigsberg», risolto appunto da Eulero con un procedimento di formalizzazione che è divenuto esemplare in una teoria oggi in piena crescita, sia dal punto di vista teorico che da quello applicativo, la teoria dei grafi. Da questi punti di partenza la topologia aveva presto inglobato anche i problemi del continuo ed era stata, quindi, naturalmente condotta anche all'analisi di alcuni concetti fondamentali alla base della geometria, quale il concetto di *distanza.*

Pressoché contemporaneamente a quelle analisi dei fondamenti della geometria che – tra Ottocento e Novecento – vengono condotte da Hilbert, da Peano, da Enriques e altri della sua scuola, ecc., un ampio dibattito che investe oltre che la matematica anche fisica, fisiologia e psicologia, e la cui portata epistemologica è indubbia, permette di individuare la genesi di certi concetti della geometria facendoli risalire al gruppo di sensazioni psicologiche e di esperienze elementari dalle quali essi traggono la loro origine, attraverso estrapolazioni «fantastiche», prima, concettualizzazioni «rigorose», poi. In particolare si viene rilevando che il concetto di due punti trae origine da esperienze del tutto diverse da quelle che conducono alle relazioni di appartenenza o ad altre relazioni tra elementi di figure, o in generale tra punti dello spazio. Muove di qui la definizione assiomatica della nozione di «spazio metrico» che consente appunto una analisi nei suoi fondamenti del concetto di distanza, e l'estensione di esso a campi sempre piú vasti e distanti dalla primitiva intuizione.

Una delle generalizzazioni piú interessanti e feconde conduce ai cosiddetti «spazi funzionali», cioè agli «spazi» i cui «punti» sono in realtà delle funzioni. È ovvio che in casi del genere non è piú possibile dare ai vocaboli della geometria classica il senso primitivo; ma si continua lo stesso a usarli, non solo per convenzione (e comodità di linguaggio), ma soprattutto perché si riesce a individuare, in molti casi, una «distanza» anche per questi spazi e a definire anche per essi entità che godono di proprietà analoghe a quelle che vengono considerate negli spazi abituali della geometria (operatori lineari, vettori, ecc.; cf. del resto quanto anticipato a p. 264). Si suggerisce cosí la strada per una facile *visualizzazione* dei procedimenti di soluzione dei problemi, se non per la loro stessa semplificazione.

È in questo ordine di idee che si è aperto, nella matematica odierna, il grande capitolo della «analisi funzionale»: l'originale appellativo di «calcolo funzionale» o di «calcolo dei funzionali» – usato nel contesto delle «funzioni di linea» di Volterra, o delle indagini di Hadamard nel campo delle equazioni alle derivate parziali e del calcolo delle variazioni, o delle prime ricerche di Fréchet – cede progressivamente il posto alla nuova terminologia che accentua l'aspetto di generalizzazione di estensione rispetto al patrimonio dell'analisi classica (una generalizzazione ulteriore è implicita nelle proposte di una «analisi generale» di ELIAKIM HASTINGS MOORE, 1862-1932, e di una «analisi astratta» di Fréchet). Si deve ricordare, infatti, che nel calcolo classico l'usuale operazione di differenziazione – come l'operazione inversa – permette di passare da una funzione a un'altra funzione; analogamente, in certi problemi del calcolo delle variazioni, un integrale può essere considerato come un operatore su una classe di funzioni di cui si considera in particolare quella che massimizza o minimizza l'integrale; nella teoria delle equazioni differenziali, infine, gli operatori differenziali vengono applicati a una classe di funzioni, convertendole in altre funzioni. L'idea unificante della «analisi funzionale» appare allora quella di considerare tutti questi «operatori» da un punto di vista astratto, come operatori applicati a una classe di funzioni; inoltre tali funzioni vengono considerate come «punti» di uno spazio in generale a un numero infinito di dimensioni, e gli operatori trasformano «punti» di uno spazio in «punti» di un secondo spazio, eventualmente coincidente col primo.

Se è proprio per questo che l'analisi funzionale può apparire come una generalizzazione della geometria euclidea, intesa come studio di trasformazioni dello spazio come rotazioni e traslazioni, essa è per questa capacità di astrazione e di sintesi uno dei settori piú originali e tipici della ricerca del Novecento. L'impiego di strutture topologiche (spazi metrici per la nozione di «distanze»; spazi topologici piú generali per la piú sfumata nozione di «vicinanza») che consentono semplicità ed eleganza, non solo danno alla trattazione massima generalità e compattezza di espressione; ma le soluzioni trovate e le procedure escogitate non hanno soltanto interesse teorico, perché le generalizzazioni che da questi procedimenti si ottengono permettono di formulare e di risolvere anche molti problemi della fisica matematica, dell'ingegneria e dell'economia. Basti per tutti la menzione della applicazione del concetto di trasformazione e di «punto fisso» (ampiamente esplorato in questo secolo fin dalle pionieristiche ricerche di LUITZEN EGBERTUS JAN BROUWER, 1881-1966, nel primo decennio del secolo) per garantire l'esistenza della soluzione di certi problemi tecnici e pratici che non sarebbero altrimenti nemmeno dominabili o richiederebbero procedimenti concettualmente molto piú onerosi. (Si noti tra l'altro che ragionamenti in termini di «punto fisso» sottendono il nucleo teorico di discipline oggi in grande espansione come la teoria dei giochi e del comportamento economico, cf. piú oltre).

d) *Un caso specifico. Lo «spazio di Hilbert» e la teoria spettrale*

Il caso specifico che ci proponiamo di trattare in questo paragrafo bene si presta ad esemplificare alcune delle idee portanti di cui si è detto all'inizio di questo capitolo (*Caratteri generali*, cf. i punti 3) 4) 5) di p. 264) e al contempo mostra come l'innovazione rappresentata dalle idee di Lebesgue – di cui si è già trattato – trovi la sua collocazione naturale entro il quadro generale dell'analisi funzionale (appena delineato nel paragrafo precedente).

Come già si è accennato, uno degli stimoli piú vivi agli inizi del Novecento era costituito dalla teoria delle «equazioni integrali» (il termine è di PAUL DU BOIS-REYMOND, 1831-1889), cioè da quelle equazioni funzionali in cui la funzione incognita appare sotto il segno di integrale. A tali equazioni avevano portato in modo diretto problemi di fisica matematica; altri problemi avevano prima stimolato lo studio di equazioni differenziali ordinarie o alle derivate parziali che, in un secondo tempo, era risultato opportuno «tradurre» in equazioni integrali. Per es. CARL GOTTFRIED NEUMANN (1832-1925) aveva ricondotto la soluzione del cosiddetto «problema di Dirichlet» (cf. anche piú oltre, p. 274) per un dominio abbastanza regolare alla soluzione di un'equazione integrale, ed era riuscito (1877) a risolvere tale equazione per mezzo di un procedimento di «approssimazioni successive»; la questione era stata riconsiderata nel 1896 da H. Poincaré. Nel 1903 lo svedese ERIK IVAR FREDHOLM (1866-1927) riprese il problema, sfruttando alcuni strumenti, i cosiddetti «determinanti di ordine infinito» che, per motivi diversi, erano stati introdotti da Poincaré nel 1885-1886 e da HELGE VON KOCH (1870-1924) nel 1891-1893. L'anno successivo fu la volta di David Hilbert, che in un serie di memorie – dal 1904 al 1910 – promosse un programma di ricerca nel campo delle equazioni integrali, incentrato «sulla costruzione sistematica di una teoria generale che risultasse interessante per la teoria dell'integrale definito e la teoria dello sviluppo di funzioni arbitrarie in serie infinite, oltre che per la teoria delle equazioni differenziali lineari e delle funzioni analitiche, per la teoria del potenziale e per il calcolo delle variazioni». Il metodo di tale ricerca consisteva «nel partire da un problema algebrico, cioè dal problema delle trasformazioni ortogonali delle forme quadratiche in n variabili in somme di quadrati, e con un rigoroso passaggio al limite per $n=\infty$, riuscire a risolvere il problema trascendente preso in esame». Hilbert non solo pervenne a completare i lavori di Fredholm e realizzò effettivamente il passaggio al limite dalle soluzioni del sistema lineare alle soluzioni delle equazioni di Neumann e Poincaré, ma finí con lo sviluppare sistematicamente quella che oggi chiameremmo «un'algebra lineare a dimensione infinita», con risultati che si applicavano non solo alle equazioni integrali ma anche «al problema della soluzione di un sistema lineare di un numero *infinito* di equazioni» e consentivano infine «un approccio di tipo nuovo alla tratta-

Wir betrachten nun das sphärische Bild des Torus. Wir denken uns etwa in jedem Punkt die nach außen weisende Richtung der Normalen ausgezeichnet. Dann werden die beiden parabolischen Kreise, da sie lauter parallele Normalen besitzen, nur in je einen einzigen Punkt der Kugel, nämlich in den höchsten und den tiefsten Punkt derselben, abgebildet. Der elliptische Teil des Torus besitzt keine parallelen Normalen. Sein sphärisches Bild bedeckt, wie man leicht sieht, die ganze Kugel mit Ausnahme des höchsten und tiefsten Punkts einfach und lückenlos. Das gleiche gilt aber auch vom hyperbolischen Teil. Im ganzen wird also die Kugel vom sphärischen Bild des Torus genau zweimal bedeckt, mit Ausnahme des höchsten und tiefsten Punkts, wo beide Bildteile zusammenhängen.

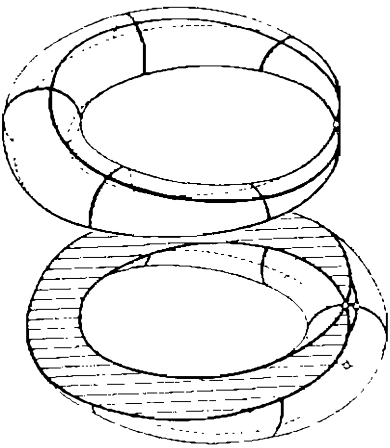


Abb. 211

Um die Art dieses Zusammenhangs zu veranschaulichen, verfahren wir wie beim vorigen Beispiel. Wir denken uns den Torus und sein sphärisches Bild schräg von oben gesehen (Abb. 212) und umgeben einen parabolischen Punkt mit einem kleinen geschlossenen doppelpunktfreien Kurvenzug 12341. Aus der Figur ist die Wahl dieser Punkte und die Gestalt des sphärischen Bilds des Kurvenzugs wohl ohne nähere Erörterung ersichtlich. Daß das sphärische Bild achtförmig ausfällt, steht im Einklang damit, daß im elliptischen Gebiet der Umlaufsinn erhalten bleibt, während er im hyperbolischen Gebiet umgekehrt wird.

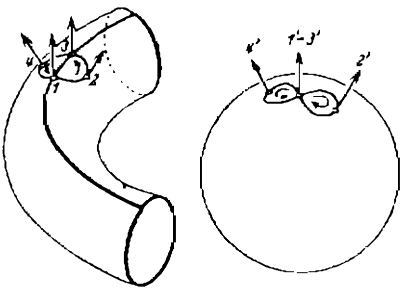


Abb. 212

Unser Beispiel ist charakteristisch für den Fall, daß die Fläche längs eines ganzen (notwendig parabolischen) Kurvenstücks von derselben Ebene berührt wird. Dagegen veranschaulicht das Beispiel der Glocke den Fall, daß die Tangentialebene sich längs der parabolischen Kurve ändert. Bei beiden Beispielen trennt die parabolische Kurve auf der Fläche ein Gebiet positiver von einem Gebiet negativer Gaussscher Krümmung.

Una pagina della Anschauliche Geometrie *di D. Hilbert e S. Cohn-Vossen (Berlino 1932). L'immaginazione geometrica al lavoro.*

zione piú generale degli sviluppi in serie di Fourier».

Hilbert inquadrò la teoria in quella struttura alla quale verrà dato poi il nome di «spazio di Hilbert» (reale), e che appare appunto come «un passaggio al limite» a partire dagli «spazi euclidei» a dimensione finita cui ci hanno abituato la geometria elementare e l'algebra. Va in particolare sottolineato (cf. il punto 5) di p. 265) che in questo «spazio» Hilbert introdusse due distinte nozioni di *convergenza*, corrispondenti a quelle che poi verranno dette «topologia debole» e «forte».

Con questi slittamenti creativi del programma originario di Fredholm e Hilbert relativo alle equazioni integrali, siamo ormai nell'universo tipico dell'analisi funzionale. I grandi lavori di F. Riesz nei primi vent'anni del secolo, la sistemazione assiomatica tra il 1920 e il 1922 della teoria degli spazi vettoriali, normati e completi, usualmente noti come «spazi di Banach» (ma dovuta sostanzialmente ad almeno tre autori, N. Wiener, E. Helly e S. Banach), l'inquadramento entro queste strutture degli «spazi» di funzioni di potenza p integrabile secondo Lebesgue, lo studio dei «funzionali» lineari e continui su questi spazi (cioè le cosiddette «questioni di dualità»), ecc., sono alla base del successo indubbio dei metodi di analisi funzionale in svariatissime applicazioni.

Quest'ultimo aspetto va sottolineato in quanto ancora ai tempi di Riesz questi sviluppi dell'analisi funzionale lineare parevano dovuti, in larga misura, a puro gusto di astrazione. È quindi particolarmente significativa la progressiva consapevolezza che tali strutture costituiscono uno strumento particolarmente flessibile per trattare questioni cruciali di fisica. Gli osservabili di un sistema fisico risultano infatti rappresentabili con operatori lineari simmetrici in uno «spazio di Hilbert». Gli *autovalori* e gli *autovettori* di quel particolare *operatore* che rappresenta l'energia, costituiscono allora i correlati matematici dei livelli di energia di un elettrone in un atomo e i corrispondenti stati quantici stazionari del sistema; infine le differenze di due autovalori forniscono le frequenze del quanto di luce emesso e permettono di definire lo spettro radiativo della sostanza in questione. Com'è noto, nel 1926 Erwin Schrödinger (n. 1887) sviluppò, in fisica quantistica, un approccio basato su equazioni differenziali e mostrò l'equivalenza della propria teoria con quella «meccanica delle matrici» infinite che fin dal 1925 era stata elaborata da Werner Heisenberg (1901-1976) e da altri esponenti della scuola di Göttingen. In una serie di lavori dal 1927 al 1929, proprio prendendo spunto dal dibattito che si veniva svolgendo tra i due approcci, J. von Neumann riuscí infine a identificare lo spazio L^2 delle frazioni il cui quadrato è integrabile secondo Lebesgue, e lo spazio l^2 costituito dalle successioni (u_m) per cui $\Sigma|u_m|^2 = l$ utilizzando il «teorema di Fischer-Riesz» (ottenuto nel 1907 da tali autori) che stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i due spazi in questione, dimostrando in sovrappiú che tale corrispondenza è lineare e isometrica: l'equivalenza tra la meccanica di Heisenberg e quella di Schrödinger ne seguiva immediatamente.

La trattazione assiomatica data da von Neumann dello «spazio di Hilbert *astratto*» (cioè prescindendo dalla interpretazione L^2 o l^2) rientra oggi nel tradizionale bagaglio matematico di ogni fisico. Ma va aggiunto che (riprendendo spunti di H. Weyl, Wiener e Banach) von Neumann se ne è servito per uno studio sistematico degli operatori in cui bene è emerso il ruolo delle due topologie «debole» e «forte» che già Hilbert aveva introdotto. L'estensione della teoria degli operatori in uno spazio di Hilbert a operatori «non limitati» e lo sviluppo di una «teoria spettrale» – in cui si ritrova come caso particolare la stessa teoria delle equazioni integrali di Fredholm – se da una parte è una rilevantissima acquisizione matematica (che bene illustra quella progressiva tendenza alla generalizzazione e insieme quella economia di pensiero che abbiamo visto caratterizzare i metodi dell'analisi funzionale) ha ancora un significato epistemologico (anche in vista delle applicazioni alla fisica) proprio in quanto lo studio del cosiddetto «spettro» costituisce, per cosí dire, lo studio di quegli oggetti fondamentali la cui conoscenza equivale a quella dell'intero universo matematico oggetto di indagine.

e) *Cenni su equazioni e sistemi differenziali ordinari, alle derivate parziali e calcolo delle variazioni*

1. EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE – La maggior attenzione al rigore e l'introduzione di piú raffinati apparati concettuali si coglie, nel Novecento, anche nel contesto delle equazioni differenziali, sia ordinarie che alle derivate parziali.

Ancora nei prini anni dell'Ottocento non era avvertita la necessità di dimostrare l'esistenza dell'integrale di una equazione differenziale ordinaria, in quanto tale equazione era quasi sempre la traduzione di un problema in cui considerazioni extramatematiche garantivano tale esistenza. Ma già Cauchy verso il 1820 aveva posto la questione con sufficiente rigore: data un'equazione del primo ordine $y' = f(x, y)$ ove si suppone che f sia continua e derivabile, si tratta di dimostrare che per valori iniziali dati x_0, y_0 *per* x e y, esiste una soluzione $y=u(x)$ unica definita in un intervallo «abbastanza piccolo» di centro x_0 e tale che $u(x_0)=y_0$. Questo «teorema di esistenza e di unicità» è quindi un tipico risultato di carattere *locale*, poiché asserisce l'esistenza e l'unicità della soluzione u in un intorno di x_0 senza compromettersi circa i possibili «prolungamenti», cioè a proposito dello studio *globale* delle soluzioni.

Non è possibile in questa sede seguire passo per passo come si siano articolati lo studio locale ed eventualmente quello globale delle soluzioni delle equazioni e dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Basterà qui ricordare (in modo da esemplificare quanto è già stato anticipato in particolare con i punti 1) e 2)) che la fine dell'Ottocento aveva visto l'impegno di non pochi analisti come G. Darboux , SOFJA KOWALEWSKA (1850-1891), RUDOLPH LIPSCHITZ (1832-1903) e VITO VOLTERRA (1860-1940) nelle questioni di esistenza e unicità delle equazioni e dei sistemi differenziali, nonché nella ricerca di algoritmi che permettessero di approssimare le funzioni incognite. E. Picard, in particolare, impiegando un metodo di «approssimazioni successive» aveva raffinato la teoria di Cauchy ottenendo importanti risultati di esistenza e di unicità; G. Peano nel 1886 aveva dimostrato, con il metodo del limite «inferiore» e «superiore» delle funzioni, il celebre teorema di esistenza per equazioni differenziali del primo ordine con la sola condizione della continuità; nel 1890, impiegando però un metodo differente, aveva esteso tale teorema anche ai sistemi. Con i lavori pionieristici intrapresi da Poincaré nell'ultimo decennio del secolo scorso, era emersa anche una potente strumentazione atta a trattare difficili problemi *non lineari*.

2. EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI – Non si insisterà qui ulteriormente sulla teoria delle equazioni e dei sistemi differenziali ordinari, un soggetto in vigorosissima crescita per tutto il Novecento, in cui, come mostrano i recenti sviluppi della teoria dei «sistemi dinamici», si è appieno rivelata l'enorme fecondità dal punto di vista «qualitativo» (cioè topologico), a suo tempo caldeggiato

da Poincaré e da GEORGE DAVID BIRKHOFF (1884-1944) (cf. del resto gli accenni al problema degli n corpi e al dibattito sulla stabilità, nelle successive pp. 284 ss.); saranno necessari, invece, alcuni accenni alle equazioni e ai sistemi alle derivate parziali, non fosse altro come termine di raffronto.

Come già si è accennato, nell'Ottocento le esigenze della fisica matematica avevano fatto sí che allo studio delle equazioni e sistemi ordinari si affiancasse quello di equazioni e sistemi alle derivate parziali (molto spesso lineari). È bene ricordare subito che la ormai abituale suddivisione in equazioni di tipo «ellittico», «parabolico» e «iperbolico», introdotta da CHARLES DE LA VALLÉE-POUSSIN (1866-1962), è motivata dalla circostanza che la fisica matematica suggerisce diversi tipi di problemi a seconda del tipo di equazione. (Si badi che vi sono, per altro, equazioni di «tipo misto», per esempio equazioni in due variabili x, y che «variano» dal tipo ellittico a quello iperbolico passando da una regione all'altra del piano (x, y) e sono di tipo parabolico lungo le linee di confine: tale è, per esempio, l'equazione in x, y detta «di Tricomi», introdotta da F. Tricomi nel 1923 e rivelatasi poi di grande interesse nella aerodinamica transonica).

Per esempio, per le equazioni ellittiche si presentano problemi di valori al contorno; tra questi, uno dei piú studiati è forse il celeberrimo «problema di Dirichlet» nel quale si tratta di mostrare l'*esistenza* e l'*unicità* (nonché il giungere in modo *costruttivo* alla soluzione) di una funzione *armonica*, soddisfacente cioè all'«equazione di Laplace», definita e regolare all'interno di una curva chiusa e assumente valori arbitrariamente dati su tale curva. Si tratta di un problema tipico della teoria del potenziale, che aveva conosciuto una prima sistematizzazione (1840) già ad opera di G.F. Gauss. Riemann, nel corso delle sue ricerche di teoria delle funzioni analitiche, aveva affrontato un «problema di Dirichlet» che aveva ricondotto a un problema di minimo. La «dimostrazione» di Riemann (imperniata su un principio euristico noto nella letteratura come «principio di Dirichlet») era stata però una delle prime vittime dell'insorgente esigenza di rigore: Weierstrass nel 1870 l'aveva infatti sottoposta a serrata critica, sviluppando un diverso approccio. Un'altra impostazione era stata infine seguita (cf. piú sopra, p. 270) da C. Neumann, H.A. Schwarz, H. Poincaré. Nel 1900 troviamo nella lista dei problemi di Hilbert (problema XX) «il problema di Dirichlet nel caso generale» in cui «le soluzioni di equazioni alle derivate parziali debbono prendere valori dati su contorni assegnati».

La storia del «problema di Dirichlet» è una delle vicende in cui si è articolato il rinnovamento della teoria delle equazioni differenziali di tipo ellittico, specie a contatto della nuova strumentazione offerta dall'analisi funzionale. Ma non vanno dimenticati il settore delle equazioni di tipo parabolico e quello iperbolico ove dominano, nei primi anni del secolo, ricercatori come Volterra e JACQUES HADAMARD (1865-1963). Ma sul potenziamento delle equazioni alle derivate parziali, specie se *lineari*, ritorneremo tra poche pagine.

3. IL CALCOLO DELLE VARIAZIONI E LE SUE ESTENSIONI – Una delle prime motivazioni del calcolo differenziale, come è noto, era stata rappresentata dalla ricerca dei massimi e dei minimi di una funzione. Alla fine del XVII sec. uno dei trionfi del nuovo calcolo era costituito dalla soluzione di problemi di massimo e di minimo in cui la quantità di cui si cercavano i punti di estremo dipendeva da una *curva* variabile e non da uno o piú parametri. Alla soluzione del classico problema degli *isoperimetri* (determinazione di una curva piana chiusa di lunghezza data

che limiti la maggior superficie possibile) se ne erano aggiunti altri: per esempio, GIOVANNI BERNOULLI (1667-1748) aveva determinato le curve di lunghezza minima su una superficie (quelle che in seguito sono state dette geodetiche); Newton aveva risolto il problema del *solido di minor resistenza* (trovare una curva piana la cui rotazione intorno a un asse verticale generi un volume che offra una resistenza minima alla caduta libera nell'aria); il problema della *brachistocrona* (curva che unisce due punti assegnati di un piano verticale in modo che un punto mobile la percorra senza attrito nel minor tempo possibile) era stato proposto nel 1696 come occasione di una gara matematica... Poi, nel lasso di tempo che va da Eulero a Weierstrass, alla considerazione slegata dei vari problemi e delle possibili soluzioni si era sostituita una ricerca sistematica, prima con gli stessi caratteri audaci della fase «eroica» del calcolo infinitesimale, poi in un contesto sempre piú sensibile alle esigenze di rigore.

Il calcolo delle variazioni nella piú volte citata comunicazione del 1900, è ormai presentato da Hilbert come una disciplina autonoma e ben definita, piú precisamente come «lo studio piú generale delle variazioni delle funzioni, e quindi come la continuazione necessaria del calcolo differenziale e integrale». In questa prospettiva rientravano anche, a detta di Hilbert, ricerche come quelle intraprese da Poincaré sul problema dei tre corpi in *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (1892-1899), in quanto questi «proprio servendosi di principi variazionali, era in grado di dedurre da orbite note, con certe proprietà, nuove orbite che godono di proprietà analoghe».

Agli inizi del nostro secolo un vasto settore del calcolo delle variazioni riguardava ancora la teoria classica come poteva essere stata formulata da un Eulero o da un Lagrange; ma proprio vicende come quella del «problema di Dirichlet» (cf. piú sopra, p. 274) avevano stimolato personaggi come Weierstrass a un notevole ampliamento e altri autori avevano quindi seguito la strada che questi aveva aperto.

Tra essi spicca lo stesso Hilbert, il cui contributo è cruciale per le dimostrazioni di esistenza delle «funzioni estremanti» per problemi in cui si deve massimizzare o minimizzare un dato «funzionale», per esempio un integrale definito. La strategia hilbertiana consisteva nel costruire la funzione estremante come limite di una successione di funzioni per cui il valore dell'integrale considerato tende al minimo (o al massimo). Tale ordine di idee evidenzia il mutamento di prospettiva rispetto al calcolo variazionale cosí come era inteso nel Settecento e ancora per gran parte dell'Ottocento, in quanto qui si insiste su procedimenti (i cosiddetti «metodi diretti») atti ad assicurare per prima cosa l'esistenza delle funzioni estremanti e quindi la loro *effettiva costruzione*. A quelli di Hilbert dovevano ben presto seguire svariatissimi contributi: B. Levi, J. Hadamard, G. Fubini, L. Tonelli, H. Lebesgue, ecc., hanno tutti dato rilevanti contributi in questa direzione. Segnaliamo ancora l'approccio che, a partire dal 1909, è stato sviluppato da W. Ritz: questo metodo «diretto» – ormai noto come «metodo di Ritz» – rappresenta l'antesignano di quel «metodo degli elementi finiti» che ha preso piede nella matematica applicata durante gli anni sessanta grazie alla cooperazione di matematici e ingegneri, che hanno ripreso un'idea abbozzata già negli anni quaranta da R. Courant.

Non possiamo qui se non accennare fugacemente a un altro importantissimo ordine di idee, quello introdotto da Marston Morse fin dagli anni trenta con la sua «teoria delle variazioni in grande» ove la strumentazione topologica si rivela essenziale. Ma un ulteriore aspetto del calcolo variazionale va però ricordato: quello del suo carattere «esemplare» che fa sí che tale calcolo si presti a svariatissime estensioni. Archetipo profondamente radicato nel modo di intendere lo svolgimento dei processi del mondo naturale e anche umano (per dirla con le parole di Eulero: «Poiché la fabbrica dell'Universo è perfetta ed è l'opera di un Creatore onnisciente, nulla in essa può accadere che non obbedisca a una qualche regola di massimo o di minimo»), la ricerca delle funzioni estremanti per un funzionale ha rappresentato un «generatore di modelli» estremamente fecondo in piú di un settore. Nel 1900 Hilbert poneva come «problema XXIII» proprio «l'estensione dei metodi del calcolo delle variazioni» nel maggior numero possibile di direzioni. Non è stato deluso. È stato osservato che in molti contesti il rinnovamento dei temi e dei problemi dell'analisi cui si è assistito nel Novecento (ausilio algebrico, creazione dell'analisi funzionale, intrusione sempre piú massiccia della topologia, ecc.) può considerarsi come «la sistematica applicazione di nuove astrazioni ad oggetti studiati tradizionalmente» (S. Ulam). Uno di questi contesti è appunto quello individuato dal punto di vista variazionale. Oggi, per esempio, si è costituita una teoria delle *disequazioni variazionali* e *quasi-variazionali* che, attraverso le connessioni con i cosiddetti «problemi di frontiera libera» (che si possono considerare sofisticatissimi problemi ormai «classici», come il problema di Dirichlet, ecc.), si può prospettare come un prolungamento naturale dei problemi ai limiti delle equazioni alle derivate parziali e i problemi di minimo del calcolo variazionale. Altrettanto rilevante ci pare un'altra estensione essenziale oggi in molte branche della tecnologia (fisica nucleare, elettronica, missilistica, volo interplanetario, ecc.), la cosiddetta «teoria del controllo ottimale» che, sotto molti profili, «difficilmente è distinguibile in modo netto dal calcolo variazionale vero e proprio» (G. Stampacchia).

Gioverà infine un ulteriore riferimento ai problemi hilbertiani. Al Congresso di Parigi del 1900 (problemi XIX e XX) Hilbert aveva richiamato l'attenzione sulla questione se le soluzioni dei problemi *regolari* del calcolo delle variazioni siano tutte *analitiche* anche nel caso in cui «come nel problema di Dirichlet, la funzione prende al contorno valori arbitrari continui, ma non analitici». Anche questa è una problematica che attraversa profondamente la storia dell'analisi del Novecento.

E, in relazione ai temi qui trattati, non si deve dimenticare che proprio lo stretto legame che, fin dal Settecento e maggiormente con l'Ottocento, si era venuto istituendo tra calcolo delle variazioni ed equazioni alle derivate parziali, ha motivato un fondamentale slittamento nello stesso concetto di «soluzione» di un'equazione differenziale. Infatti, non pochi problemi formulati originalmente mediante equazioni alle derivate parziali possono venir «tradotti» in problemi variazionali; ma la traduzione è, per cosí dire, «infedele», in quanto la soluzione della versione variazionale del problema può, poniamo, non ammettere delle derivate parziali dell'ordine richiesto dalla formulazione originaria. In questo senso si dice che la nuova formulazione del problema è una formulazione «debole» e si chiama «soluzione debole» la soluzione cosí trovata (per esempio, ciò è capitato nello studio «generale» del problema di Dirichlet). L'interesse per le soluzioni deboli si è via via progressivamente ampliato, grazie soprattutto all'opera pionieristica di alcuni matematici negli anni trenta come R. Courant, K.O. Fiedrichs, J. Leray e quindi S.L. Sobolev: del resto, nel contesto dell'attuale *teoria delle distribuzioni* o *funzioni generalizzate* (che ha conosciuto forma sistematica solo dopo la guerra mondiale), la equivalenza tra le due versioni «forte» e «debole» di un dato problema viene ristabilita, ma si pone il problema della «regolarità» delle soluzioni trovate.

f) *La nozione di «problema ben posto» e alcune riflessioni conclusive sulla ricerca nell'analisi*

L'approfondimento delle questioni di «dualità», cioè lo studio dei funzionali lineari e continui negli spazi funzionali, promosso in particolare da F. Riesz (cf. p. 267), si è rivelato di importanza notevolissima nella teoria della misura e della integrazione e ha trovato una sua naturale prosecuzione nello studio (iniziato da Sobolev verso il 1937) delle «forme lineari continue» sullo spazio delle funzioni di variabile reale infinitamente derivabili (tale spazio è uno «spazio di Fréchet»: questo tipo di spazi, di cui alcuni esemplari erano stati studiati da Fréchet nei primi anni del secolo, rappresentano una generalizzazione degli spazi normati che si rivela particolarmente utile nello studio delle equazioni alle derivate parziali). Tali forme sono appunto note come «distribuzioni» e costituiscono dunque una generalizzazione della nozione di misura. È in quest'ambito, infine, che, a partire dagli anni cinquanta, si è venuta costituendo una sorta di «analisi lineare globale» che rappresenta l'esito di una tradizione di ricerca che aveva sostanzialmente debuttato, verso il 1800, con i tre prototipi costituiti dall'equazione di Laplace, l'equazione delle onde e l'equazione del calore, e che oggi conosce ulteriori approfondimenti (teoria degli operatori «pseudodifferenziali», loro estensione all'analisi sulle «varietà differenziali», ecc.). Ma ciò basti sugli aspetti lineari, ricordando, comunque, che «bisognerà prima o poi abbandonare la comoda convinzione che la natura ci porga solo problemi non lineari» (G.B. Dantzig). Pur non mancando fondamentali contributi nel settore, la teoria per equazioni alle derivate parziali non lineari non è però attualmente allo stesso livello di articolazione della corrispondente teoria per le equazioni ordinarie.

Ma è tempo di alcune riflessioni dopo i cenni di necessità brevi e tutt'altro che esaurienti che si sono dati circa le varie equazioni «funzionali».

Quando si traduce in una equazione del genere una questione in senso lato «fisica», il problema matematico ottenuto «dovrebbe soddisfare i seguenti requisiti fondamentali: 1) la soluzione esiste; 2) la soluzione è determinata univocamente; 3) la soluzione dipende con continuità dai dati». La citazione è tratta dai *Methods of Mathematical Physics* (vol. II, Interscience and Killey, New York 1962, p. 227; ma la prima versione, in lingua tedesca, era apparsa nel 1924) di D. Hilbert e R. Courant e cosí prosegue: «Il primo requisito esprime la condizione logica che alla soluzione non sia imposto troppo, cioè proprietà tra loro incompatibili. Il secondo requisito implica la completezza del problema: incertezza e ambiguità devono essere escluse se non inerenti alla situazione fisica (...). Il terzo requisito, particolarmente stringente, è necessario affinché la formulazione matematica descriva fenomeni naturali osservabili. I dati sperimentali non possono venir concepiti come fissati rigidamente; il semplice processo di misurazione comporta piccoli errori. Per esempio, valori assegnati delle coordinate spaziali e temporali sono sempre stabiliti entro un certo margine di precisione. Pertanto possiamo pensare che un problema matematico corrisponda in modo realistico a fenomeni fisici solo nel caso in cui una variazione sufficientemente piccola dei dati implica una modificazione arbitrariamente piccola della soluzione. Questo requisito che diremmo di "stabilità" è essenziale non solo per problemi dotati di senso nella fisica matematica, ma anche per i metodi di approssimazione» (*op. cit.*, p. 227). Queste parole commentano la nozione di *problema ben posto*, cioè rispondente ai tre requisiti su menzionati, introdotta da Hadamard nel 1921 in concomitanza con le sue ricerche sulle equazioni di tipo iperbolico. È abbastanza chiaro, d'altra parte, come la richiesta che i problemi siano ben posti realizzi quell'ideale di previsione dei fenomeni e loro descrizione numerica di cui si è trattato in precedenza, almeno in linea di principio: se i modelli fossero costruiti in modo davvero adeguato alle situazioni reali, i problemi da risolvere non potrebbero non essere «ben posti». Questo è, ovviamente, un postulato che esplicita, per cosí dire, una condizione *a priori* della ricerca. Va aggiunto subito che, dal punto di vista strettamente matematico, per poter dire che il problema è ben posto vanno individuati in modo opportuno gli spazi funzionali in cui si cerca la soluzione e quelli in cui variano i dati. Ma questo «ideale» non va inteso in modo *troppo rigido*: come avvertono ancora Courant e Hilbert (*op. cit.*, p. 230), «fenomeni non lineari, teoria quantistica, infine il sorgere stesso di potenti metodi numerici hanno mostrato che i "problemi ben posti" sono lungi dall'essere gli unici che riflettono in modo appropriato i fenomeni reali». Sono spesso i problemi «mal posti» (per es., problemi inversi, problemi di controllo, problemi di frontiera libera, ecc.) che si rivelano euristicamente stimolanti e, nei casi piú felici, «generano» problemi ben posti, quando una piú accurata analisi della questione fisica fa apparire nel modello delle condizioni supplementari (per esempio del tipo ottimizzazione di qualche funzionale come nei problemi di controllo).

C'è infine un ultimo aspetto. Joseph Fourier (le cui parole introduttive alla *Théorie analytique de la chaleur* abbiamo richiamato) ammoniva che quanto l'analisi forniva doveva essere passibile di «interpretazione numerica» cosí necessaria in tutte le applicazioni tanto che «si può dire che, nella misura in cui non la si è ottenuta, le soluzioni restano incomplete e inutili». Si può comprendere da queste parole stesse la rilevanza che acquistano dunque, nella prospettiva qui delineata, quei «metodi numerici» piú o meno recenti (metodo delle differenze finite, metodo degli elementi finiti, ecc.) che mirano a costruire in modo effettivo la soluzione del problema.

4. Modellizzazione quantitativa e qualitativa dei processi reali

a) *Alcuni fattori della «rivoluzione» nel calcolo numerico*

Benché la matematica in vari ambienti sia considerata come una scienza prevalentemente «astratta», è innegabile che il suo sviluppo e la sua fisionomia si colleghino spesso in modo stretto e impensato con i problemi «concreti» del calcolo e delle applicazioni. Questo aspetto della ricerca si è manifestato in modo a un tempo profondo ed esteso soprattutto nei tempi piú recenti (in particolare dal finire degli anni quaranta in poi) quando la necessità dell'applicazione – dalla fisica alla chimica, alla biologia, all'ingegneria, alla gestione dell'informazione – ha mutato, spesso in modo radicale, certe problematiche che si presumevano tipicamente teoriche e «pure» o, almeno, ne ha cambiato l'impostazione.

Vedremo tra poche righe le ragioni di questa profonda «rivoluzione scientifica». Non va intanto dimenticata l'influenza dei problemi pratici che sono stati risolti già in passato: basti pensare alla tabulazione delle funzioni trigonometriche per esigenze astronomiche e geografiche (navigazione). In tempi relativamente piú vicini, un'invenzione come quella dei logaritmi ha costituito un passo importantissimo per la possibilità di trattazione e risoluzione di numerosi problemi, quindi anche nella orientazione di non poche ricerche teoriche. Infine l'Ottocento non aveva affatto ignorato problemi di calcolo concreto, soprattutto a causa del progresso compiuto dalla analisi matematica e con lo studio di sempre nuove famiglie di funzioni (per esempio funzioni ellittiche), di cui si scoprivano le connessioni non solo con problemi tipicamente «puri» (per esempio, di teoria dei numeri) ma anche con questioni di fisica matematica: si richiedevano pertanto tabulazioni e calcoli per impiegare in modo efficace anche nella tecnica le «nuove» funzioni.

I primi decenni del Novecento hanno visto, sotto il profilo dello sviluppo degli *strumenti di calcolo*, la diffusione e il perfezionamento delle macchine calcolatrici meccaniche, perfezionamento che è stato notevolmente facilitato dall'impiego di motori elettrici (in grado di fornire, per cosí dire, la «forza motrice» per le inevitabili manipolazioni e movimenti degli apparecchi meccanici – ruote dentate, soprattutto, che realizzano i calcoli materialmente).

Va tuttavia osservato che le possibilità «teoriche» di manovra dei concetti e di rappresentazione degli enti matematici – nonché di risolubilità dei problemi – rimanevano sempre in uno stato molto piú avanzato di quanto non fossero le possibilità di calcoli «pratici». Per fare un solo esempio (tra i tanti possibili): prima della fine dell'Ottocento era ampiamente nota – nelle sue basi algebriche e nella sua interpretazione geometrica – la teoria dei sistemi di equazioni lineari, grazie soprattutto allo studio degli iperspazi proiettivi. Ma i calcoli effettivi atti a risolvere un sistema di un numero di equazioni che oggi riterremmo modestissimo (diciamo, una decina di equazioni), superava ogni possibilità operativa, a meno di ricorrere a metodi faticosissimi, molti dei quali risalivano alle procedure escogitate da Gauss.

Questa lacuna è stata colmata solo dal contemporaneo confluire di idee nuove e di innovazioni tecniche che hanno profondamente rimodellato le possibilità di calcolo e di gestione dell'informazione, influendo anche sulla struttura di molta problematica della matematica cosiddetta «pura».

Non è possibile in questa sede dare una, pur sommaria, ricostruzione storica di questa svolta: si delineeranno qui, semplicemente, alcuni nodi fondamentali.

1. La teoria dell'informazione – Si deve a Claude E. Shannon (n. 1916) la definizione matematica (1948) del concetto di «informazione», precedentemente confinato nel limbo dei significati di necessità vaghi, come è tipico per i termini del linguaggio comune. Anche se, sotto il profilo dei fondamenti, la teoria dell'informazione è oggi tutt'altro che un soggetto non problematico, comunque la possibilità – già delineata da Shannon – di una «misura dell'informazione» intesa come una nuova grandezza matematica, determinabile con procedure concrete, ha aperto tutta una nuova gamma di questioni. Negli studi relativi alla possibilità di codificazione dei messaggi – cui contemporaneamente a Shannon si applica sul finire degli anni quaranta e negli anni cinquanta anche il sovietico Andrej Nikolaevič Kolmogorov (n. 1903) – che permettano una «trasmissione» in modo economico e non ambiguo in presenza di «rumori di fondo», vengono tra l'altro utilizzate convenzioni di rappresentazione dei numeri diverse da quella decimale, come per esempio quella *binaria*, destinata a rivelarsi notevolmente utile nei nuovi strumenti di calcolo elettronico.

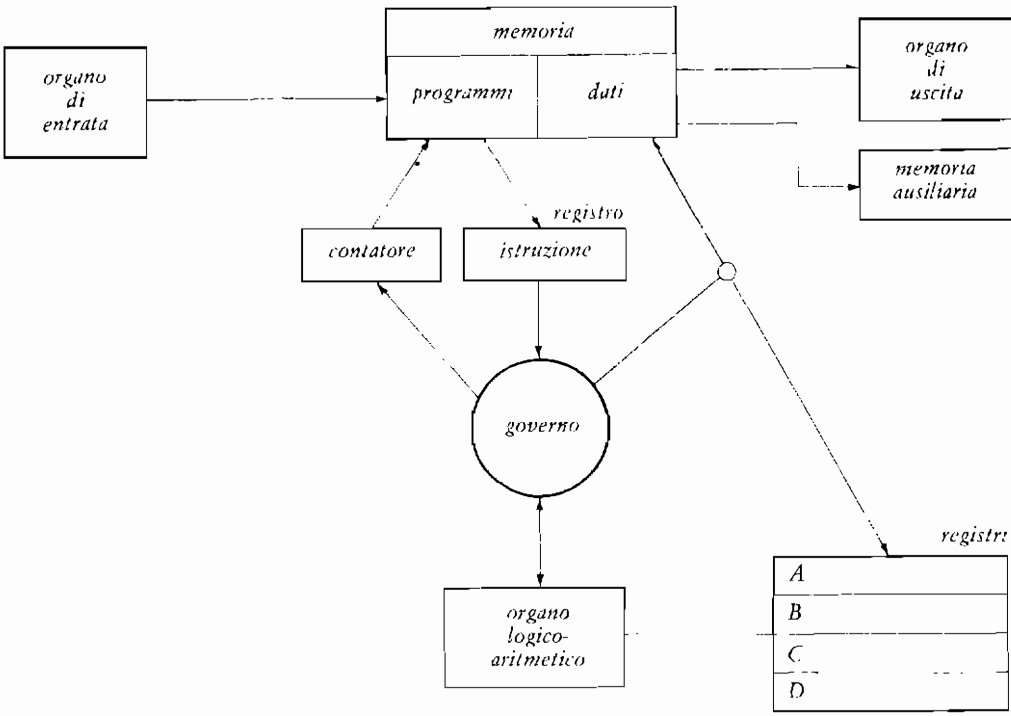
2. Cibernetica e teoria degli auto-

MI – Una seconda innovazione concettuale di grande rilievo è rappresentata dalla costituzione di una teoria matematica degli automi e dalla chiarificazione della nozione di «autoregolazione» sia per gli organismi viventi che per i macchinari. È questa la doppia motivazione che, pressoché contemporaneamente alla creazione da parte di Shannon della teoria matematica dell'informazione, sottende la costituzione della cosiddetta «cibernetica» ad opera di un gruppo di ricercatori delle piú varie discipline – matematici, fisici, biologi, ingegneri – tra cui domina la personalità del matematico americano NORBERT WIENER (1894-1964). La teoria dei cosiddetti *servomotori* – inizialmente legata ad applicazioni ingegneristiche – non solo si è rivelata come il quadro concettuale atto a impostare i problemi di regolazione automatica (e di simulazione di autoregolazione del vivente) ma si è sempre piú collegata con l'idea stessa di *macchina calcolatrice* che non solo esegue i calcoli che le si ordina di fare, ma che è capace di tenere conto del proprio stato e di dirigersi di conseguenza, realizzando un determinato *programma* man mano che il calcolo procede.

3. I MODERNI ELABORATORI ELETTRONICI – La possibilità di eseguire calcoli al di là delle normali limitazioni umane (rispetto a velocità, complessità, eliminazione di errori, ecc.) era stata già intravista da CHARLES BABBAGE (1792-1871), ma la realizzazione meccanica era risultata adeguata solo per un tipo molto elementare di operazioni logiche. Il Novecento aveva visto realizzare altri progetti pionieristici: gli studi di R.L.A. Valtat in Francia (1931) sull'importanza del sistema binario (ancor prima, dunque, delle ricerche di Shannon), la *first purely electronic counting device* di C.E. Wynn-Williams, impiegata (1932) in Inghilterra per contare particelle nucleari, con metodo binario; il calcolatore binario di L. Couffignal (Francia 1936). Con la calcolatrice ASCC (*Automatic Sequence Controlled Calculator*) piú nota come Mark I, costruita a partire dal 1937 da H.H. Aiken con notevoli finanziamenti da parte dell'International Business Machines Corporation (IBM), ma entrata in funzione nel 1944 – ancora elettromeccanica (e decimale) – si è già fatto un notevole passo in avanti: la macchina calcola logaritmi, seni e funzioni di Bessel. Ben presto si passa però a macchine che sfruttano valvole elettroniche che hanno tempi di funzionamento molto piú rapidi e aumentano considerevolmente la velocità di calcolo. Il primo calcolatore di questo tipo è l'ENIAC (*Electronic Numerical Integrator And Calculator*) dovuto (Philadelphia 1946) agli sforzi congiunti di W.P. Eckert, J.W. Mauchly, H.H. Goldstine, J. von Neumann. Progettato per calcolare tabelle di tiro, ENIAC è agevolmente modificabile in modo da poter eseguire altri calcoli, come la soluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali.

b) *Matematica del continuo o matematica del discreto?*

Da ENIAC ai modernissimi calcolatori ultrarapidi e (spesso) miniaturizzati: un salto tecnologico che ha fatto sí che, come ha osservato un teorico del calcolo numerico, P. Henrici, la modellistica matematica senza il *computer* «è oggi impensabile, come Los Angeles senza l'automobile». Ma i mutamenti intellettuali che questo salto ha imposto non sono meno rilevanti. Un primo aspetto della sempre piú ampia utilizzazione dei calcolatori elettronici è innanzitutto quello costituito dalla problematica che essi pongono all'algebra e alla logica, interagendo direttamente con lo studio dei problemi – a un tempo logici e linguistici della comunicazione – e con gli stessi fondamenti della matematica. Potremmo anche dire che il ricerca-



La struttura di un elaboratore elettronico.

tore è pressoché costretto a *dialogare* con il calcolatore: dunque è obbligato ad analizzare il proprio modo di pensare, la sua stessa tecnica di espressione e di comunicazione. Ne è conseguito un nuovo ramo della matematica (in particolare collegato con la teoria dell'informazione) che si interessa di quella che viene usualmente chiamata «intelligenza artificiale».

Un secondo aspetto è dato dalla variazione, a volte imponente, che la disponibilità di questi strumenti ha apportato nel panorama degli studi teorici, in vista delle eventuali applicazioni. Molte ricerche teoriche della matematica «classica», anche se non sempre in forma esplicita e voluta, erano orientate proprio dall'esistenza di certi mezzi di calcolo e dalla possibilità offerta dalla tabulazione esistente di certe funzioni. Per esempio: prima della dimostrazione del classico teorema di Ruffini e Abel le ricerche per la risoluzione delle equazioni algebriche erano – in un modo quasi inconscio – orientate verso la rappresentazione delle radici mediante radicali: cioè mediante espressioni che richiedevano algoritmi *infiniti*, ma che si ritenevano «conosciute praticamente» perché tabulate (o perché esistevano delle procedure standardizzate per il loro calcolo). O, ancora, basti pensare alla ricerca – a volte molto laboriosa – di certe soluzioni di equazioni differenziali espresse mediante funzioni «elementari» –

come funzioni trigonometriche o logaritmi – considerate piú semplici e piú note, semplicemente per il fatto che erano tabulate da lungo tempo... Ma con l'avvento del calcolo ultrarapido offerto dagli elaboratori elettronici, il risultato di certi calcoli ovvero la soluzione di certi problemi è raggiungibile direttamente, senza giri viziosi, senza, cioè, la necessità di passare attraverso gli strumenti classici. Un esempio elementare è offerto dai problemi della risoluzione dei triangoli piani e sferici: una volta essi richiedevano lunghi calcoli e consultazioni di tavole logaritmico-trigonometriche; oggi, invece, si possono risolvere direttamente mediante i valori naturali delle funzioni trigonometriche.

Inoltre, in molti casi, il problema «concreto» studiato è troppo complicato per un'analisi teorica adeguata, anche se i risultati finali sono discretamente comprensibili. In questi casi il calcolatore è programmato non per «concretizzare» un modello matematico già dato, ma per fungere da surrogato, per cosí dire, a un tale modello: in tale caso il calcolatore *simula* tutte le circostanze, con tutte le varianti possibili, in modo da poterle studiare, per cosí dire, «in condizioni di laboratorio».

Un esempio chiarirà la questione: la teoria matematica delle «code» è ormai oggi altamente progredita, ma in molti casi pratici la situazione è talmente complicata che un'analisi teorica risulta di fatto fuori dalle nostre possibilità. Un grande magazzino ha centinaia di commessi, vende un amplissimo assortimento di prodotti ed è visitato da clienti che richiedono le merci piú disparate. La direzione del magazzino può raccogliere statistiche particolareggiate sul numero dei clienti in un dato giorno, la loro distribuzione a seconda dell'ora o del prodotto desiderato, il tempo necessario per servire ciascun cliente, ecc. Lo scopo è di determinare il minimo numero di commessi che basti a garantire un servizio efficiente, la distribuzione ottimale dei commessi nei vari reparti, l'orario migliore, ecc. Ma come rispondere con gli strumenti matematici tradizionali? Pressoché impossibile. Meglio è che la direzione si affidi a un calcolatore, fornendogli tutte le *informazioni* disponibili sui clienti e sulla presente distribuzione dei commessi; il calcolatore simula l'attività degli uni e degli altri per, poniamo, un intero anno, segnalando eventuali ingorghi o file di attesa indesiderati ogni volta che se ne formino. La direzione modifica allora la distribuzione dei commessi, eventualmente aumentando il numero se il servizio risulta troppo scadente o cercando di risparmiare, con personale meno numeroso ma meglio distribuito; di nuovo il calcolatore *simula* l'attività del grande magazzino per un anno intero e segnala le conseguenze delle modifiche introdotte.

Questo procedere «casuale», per tentativi ed errori, attuati però non nella pratica, ma *nella memoria del calcolatore*, fino a trovare una soluzione vicina a quella «ideale», è tipico di alcuni metodi oggi tra i piú efficaci della cosiddetta «simulazione casuale», i cosiddetti «metodi Monte-Carlo» introdotti da J. von Neumann e S. Ulam negli anni quaranta per studiare la diffusione casuale di neutroni in materiale fissile: oggi la gamma di applicazione di questi particolari «metodi numerici» è ben piú ampia. E ancora piú interessante è il fatto che essi si rivelano efficaci anche in problemi a prima vista tipicamente deterministici, ove ogni aspetto «aleatorio» sembrerebbe escluso.

Un terzo aspetto – del resto connesso ai primi due che abbiamo segnalato – non va dimenticato nel valutare le conseguenze della «rivoluzione dei calcolatori». La «matematica del continuo» sembra infatti notevolmente ridotta come importanza e portata, a vantaggio di una «matematica del discreto». In modo approssimativo ma suggestivo, si potrebbe dire che l'immaginazione geometrica che sta alla base del concetto di derivata e di integrale e che ha dato origine ai metodi del calcolo differenziale e integrale, privilegia una concezione del continuo che pare adeguata all'esperienza macroscopica; pertanto, in questo ordine di idee, l'approssimazione delle misure delle grandezze in fisica, ecc. – grandezze che ci immaginiamo, appunto, continue – viene fatta mediante numeri razionali e conduce a «errori» inevitabili, testimonianze, per cosí dire, della nostra inabilità a misurare con precisione estrema e finale le grandezze considerate. Ma nella trattazione che gli strumenti di calcolo attuali suggeriscono, ogni numero viene *rappresentato* (piuttosto che *immaginato*) come una successione *finita* di simboli (fisici o grafici non interessa qui determinare) e pertanto lo schema del *discreto* si presenta come piú immediato o piú naturale del *continuo* per la modellizzazione efficace dei processi reali, alla luce dei mezzi linguistici e computazionali che la matematica mette oggi a disposizione.

Col costituirsi in disciplina autonoma e articolata della «analisi numerica» e con il suo progressivo riconoscimento a livello istituzionale (a cominciare – 1947 – dalla pianificazione negli USA dei vari INA – *Institute for Numerical Analysis* – nei laboratori di matematica applicata), è cambiato, conseguentemente, non solo lo scenario della ricerca pura e applicata, ma la stessa didattica. Va infine sempre tenuto presente che le formule e gli algoritmi presentati in un testo di matematica «pura» tradizionale sono stati ideati per essere usati con l'aritmetica «esatta» dei numeri reali; ma spesso si rivelano ben poco adatti e maneggevoli nel calcolo numerico. Di qui l'esigenza di una riforma della manualistica, che sappia tener conto del fatto che la materia presentata in un testo non solo sia comprensibile e accessibile, ma anche facilmente trasferibile in campo pratico.

Tramonto quindi della «matematica del continuo»? Sí e no. Sí: senza dubbio, fine di un privilegio «epistemologico». No: essa resta un modo di articolare non poche intuizioni «geometriche» che spesso si rivelano preziose non solo in contesto «puro», ma anche in quello applicativo. È certo presente oggi una tendenza alla «computerologia» che tende a concentrare il lavoro del matematico sulla programmazione, la superprogrammazione, i rapporti tra macchina e essere umano, tra macchina e macchina; una tendenza spesso accompagnata da una sorta di «metafisica del computer» secondo cui gli elaboratori elettronici, di fatto, se non possono tutto, possono però di piú di qualsiasi ricercatore in carne ed ossa. A questa moda tuttavia non sono state risparmiate, anche di recente, critiche e obiezioni anche molto severe, tese a rivalutare la rilevanza concettuale e la funzione euristica delle matematiche del «continuo» nella modellizzazione scientifica e anche nella stessa ricerca tecnologica. Di piú: un atteggiamento di cautela è suggerito dallo stato attuale della stessa «analisi numerica». Un impressionante e massiccio studio dei vari algoritmi praticabili su macchina è spesso accompagnato da un procedere a tentoni, che fa, come dicono alcuni, della analisi numerica piú «un'arte» che una disciplina in senso stretto «scientifica»: d'altra parte, come molta analisi classica e molta analisi funzionale, l'analisi numerica fornisce delle dimostrazioni di esistenza (il cui tratto distintivo è che si tratta di dimostrazioni di tipo costruttivo): come tale essa accentua la portata «ontologica» (in senso stretto: introduzione di nuovi enti matematici nelle situazioni in cui ciò è richiesto) della matematica e, sotto questo profilo, non c'è opposizione pregiudiziale alla matematica piú tradizionale. La «matematica del continuo» – cioè l'analisi classica, l'analisi funzionale, la topologia – può svolgere il ruolo di una sorta di «ideale regolativo» rispetto al proliferare delle tecniche calcolistiche piú disparate, come gli studi sugli errori, le convergenze, la stabilità dei risultati numerici, le approssimazioni, ecc. stanno a mostrare in piú di un caso specifico.

Questa proficua interazione di discreto e di continuo influenza le stesse modalità di applicazione, dunque le relazioni tra la matematica e le altre scienze e, piú in generale, le varie forme di attività intellettuale. È indubbio che proprio il dispiegamento delle capacità computazionali e modellistiche di cui si è qui parlato ha rafforzato e ampliato l'impiego della matematica nelle cosiddette «scienze dell'uomo»: scienze sociali ed economia, ma anche linguistica e storia non sono piú terreni preclusi alla modellizzazione matematica. Per esempio, la teoria della programmazione lineare (che ha avuto uno straordinario impulso, soprattutto in URSS e in USA, ancor prima della fine della seconda guerra mondiale per tutta una serie di motivazioni pratiche: ottimizzazione delle risorse, pianificazione economica, questioni logistiche, ecc.) ha permesso di risolvere una quantità di problemi che poteva in precedenza venire formulata senza alcuna portata pratica, per la difficoltà dei calcoli e quindi l'impossibilità di pervenire a soluzioni nei casi particolari. Lo stesso può dirsi per un settore oggi in impetuosa ascesa: quello della teoria dei giochi, il cui debutto «ufficiale» si fa risalire alla pubblicazione (1944) del trattato *Theory of Games and Economic Behavior* di J. von Neumann e O. Morgenstern: ogni problema circa giochi a *due persone* e a *somma zero* risulta traducibile in un problema di programmazione lineare e viceversa; ciò ha richiamato l'interesse – non solo di matematici ma anche di studiosi di scienze sociali – sulla teoria che permette questo tipo di «traduzione», la cosiddetta teoria delle «figure convesse» (*convex bodies*). Promettente appare anche la teoria dei giochi a n persone (con $n > 2$) e non a somma zero, che viene sempre piú a rappresentare un quadro concettuale adatto per una modellizzazione di non poche situazioni della vita associata: conflitto o cooperazione internazionale, studio delle coalizioni, decisioni collettive, questioni di «contrattazione» (*bargaining problems*), ecc. Recenti programmi che mirano ad estendere l'approccio (neo) bayesiano – che domina nella teoria delle decisioni individuali in caso di incertezza – alle decisioni collettive e alle situazioni conflittuali (teoria dei giochi) fino a includere una modellistica articolata delle «funzioni di utilità» degli agenti sociali in una rinnovata visione «utilitaristica» della società e dell'etica – come per esempio il programma sviluppato negli anni settanta da J. Harsanyi e T. Selten – fanno a livello di modellizzazione un uso notevolmente spregiudicato e audace di quella commistione di matematica del discreto e matematica del continuo cui si è accennato sopra.

c) *Stabilità e instabilità: i modelli «qualitativi» della teoria delle catastrofi*

Al *continuo* della matematica tradizionale – quella cioè che ha articolato le intuizioni di fondo soggiacenti ai concetti-chiave della analisi (limite, continuità, derivata, integrale, ecc.) – si è opposto tradizionalmente non solo il *discreto* ma anche il *discontinuo*. A livello di semplice descrizione linguistica e qualitativa è, del resto, abbastanza facile esprimere problemi relativi al cambiamento «brusco» da un regime a un altro: cambiamenti di stato in fisica, mutamenti del corpo animale, sconvolgimenti sociali, ecc., rientrano tutti in questa gamma di fenomeni. Non meno che la coppia continuo-discreto anche quella continuo-discontinuo ha dunque tormentato il pensiero occidentale: dalle intuizioni dei presocratici sul divenire alla teoria aristotelica di materia e forma (e di potenza e atto); dall'essenzialismo platonico alle teorie medievali e rinascimentali del mutamento perpetuo ma secondo schemi fissi, ecc. È altresí noto che il grande strumento concettuale di comprensione della natura e di modellizzazione di non pochi processi fisici – in particolare, del moto – il calcolo differenziale e integrale non pare atto a una trattazione sistematica delle discontinuità.

L'enfasi sulle discontinuità – presente per tutto l'Ottocento piú che nella scienza fisico-matematica in scienze meno matematizzate come la biologia e la geologia (si pensi alla disputa intorno alle idee di Cuvier, 1769-1832, circa le «Rivoluzioni alla superficie del globo») – ha trovato una prima esplicitazione formale nella matematica solo con la relativamente recente «teoria delle catastrofi», creata sostanzialmente dal matematico francese René Thom (n. 1923). Essa, in breve, si sforza di dominare quelle masse di fenomeni che sfuggono alla legge di proporzionalità, fin dai tempi di Galileo – se non da quelli di Euclide e Archimede – considerata come principio fondante in tutte le trattazioni quantitative della realtà materiale.

La teoria delle catastrofi si è sviluppata nel contesto dello studio della topologia differenziale, un settore che deve il suo assetto attuale alle ricerche intraprese negli anni cinquanta da R. Thom e C.T.H. Wall, ma affonda le sue radici in un ordine di idee che è venuto progressivamente affiorando sul finire dell'Ottocento. Nel contesto della fisica matematica era stato Maxwell (1831-1879) nel corso di una conferenza (1876) a richiamare l'attenzione dei ricercatori sul fatto che, mentre usualmente si impiegano in meccanica sistemi di equazioni differenziali ordinarie che presuppongono una sorta di «assunzione di continuità», le situazioni reali presentano casi patenti di discontinuità, e aveva proposto di fare luce su tali questioni «prendendo in considerazione la stabilità e l'instabilità». Certo, ancora una volta il pensiero scientifico riprendeva in esame un tema antichissimo (già il presocratico Anassimandro, 610-547 a. C., si chiedeva se il cosmo intero fosse stabile e non potesse venire sconvolto da una pur piccolissima perturbazione, e optava per la stabilità sostanzialmente in base a considerazioni di simmetria); ma nel volgere di pochi anni, la questione era stata affrontata, in un dibattito a piú voci che all'inizio del Novecento vede impegnati, circa la portata di una teoria fisica, scienziati-filosofi come E. Mach (1838-1916) e H. Hertz (1857-1894), H. Poincaré e P. Duhem (1861-1916), ma anche fisici come L. Boltzmann (1844-1906), M. Planck (1858-1947), A. Einstein, e, ancora, matematici come Hilbert e Hadamard.

Nell'ultimo decennio dell'Ottocento, Poincaré aveva portato a termine la sua dimostrazione dell'insolubilità, in termini classici, del cosiddetto problema dei *tre o piú* corpi, mostrando che era necessario ricorrere, già nel contesto di una scienza «esatta» come la meccanica celeste, a metodi di approssimazione. Lo studio del sistema solare, che è appunto un tipico sistema a *n* corpi, ove uno di essi, il sole, è di massa notevolmente maggiore degli altri, doveva essere reimpostato su basi nuove: in particolare, doveva essere riconsiderata su basi nuove la questione della stabilità del sistema che a suo tempo ancora un Laplace dava per scontata: «Il sistema del mondo non fa che oscillare attorno a uno stato medio dal quale non si allontana che per una piccolissima quantità. Esso, per merito della sua costituzione e per merito della legge della gravitazione, gode di una stabilità che può essere distrutta soltanto da cause estranee, e noi siamo certi che la loro azione è insensibile a partire dalle osservazioni piú antiche ai nostri giorni». Questa «catastrofe di Poincaré» (cosí è stata battezzata da I. Prigogine e I. Stengers) non solo ha prodotto un fondamentale slittamento nel problema originario della stabilità del cosmo quale un Newton o un Laplace potevano formularlo (si badi che oggi imponenti risultati relativi ai cosiddetti «sistemi non integrabili», in particolare di Arnold, Kolmogorov e Moser, a partire dagli anni cinquanta, sembrano garantire che il sistema solare è almeno «quasi stabile»: collisioni di pianeti e fughe di un pianeta dalla sua orbita «kepleriana» sono solo altamente improbabili, ma non del tutto escluse!), ma un diverso modo di pensare gli stessi modelli del mondo fisico. È in particolare Pierre Duhem, nella sua *Théorie Physique* (1906) che, sulla scorta della questione del sistema solare (e prendendo spunto da alcuni esempi matematici trovati da Hadamard) insiste sul fatto che oltre a controllare un modello in base alla controllabilità delle predizioni che esso fornisce, i ricercatori devono attentamente valutare se il modello non vari sensibilmente con una piccola perturbazione dei dati. Nel 1912 Poincaré (nelle sue *Dernières pensées*) cosí riassumeva l'intera questione: «Oggi non si pone soltanto la domanda se le equazioni differenziali della dinamica debbano venir modificate, ma ne viene posta un'altra, se le leggi del movimento potranno venir ancora espresse da equazioni differenziali. E questa sarebbe la rivoluzione piú profonda subita dalla filosofia naturale da Newton in poi. Il luminoso genio di Newton aveva ben visto (o creduto di vedere, cominciamo a chiederci) che lo stato di un sistema mobile, o, piú in generale, quello dell'Universo, non poteva dipendere se non dal suo stato immediatamente antecedente, e che, nella natura, tutte le variazioni debbono aver luogo in modo continuo (...). Ma ora è questa idea fondamentale che viene messa in discussione: ci si chiede se non sia necessario introdurre nelle leggi naturali *discontinuità*, non apparenti ma essenziali».

Proprio dalla teoria dei «sistemi dinamici», che generalizza l'approccio «qualitativo» (dunque topologico) dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie promosso da Poincaré e dall'americano Birkhoff, e che ha conosciuto una notevole crescita grazie ai contributi sovietici sul finire degli anni trenta, quindi una fortissima ripresa negli anni cinquanta e sessanta (grazie agli sforzi di matematici di non poche scuole e Paesi: URSS, USA, Francia, ecc.), prende le mosse la teoria delle catastrofi, che considera l'evoluzione di un sistema, in breve, come «un pacchetto di sistemi dinamici», in modo che il trapasso da un regime «qualitativo» a un altro è interpretabile come un salto da un sistema dinamico a un altro del «pacchetto». I «punti di catastrofe» sono quindi tipicamente zone di instabilità: la teoria è dunque particolarmente rivolta a tutte quelle situazioni in cui – si tratti di sistemi materiali o di fenomeni umani – è patente una qualche forma di «instabilità strutturale».

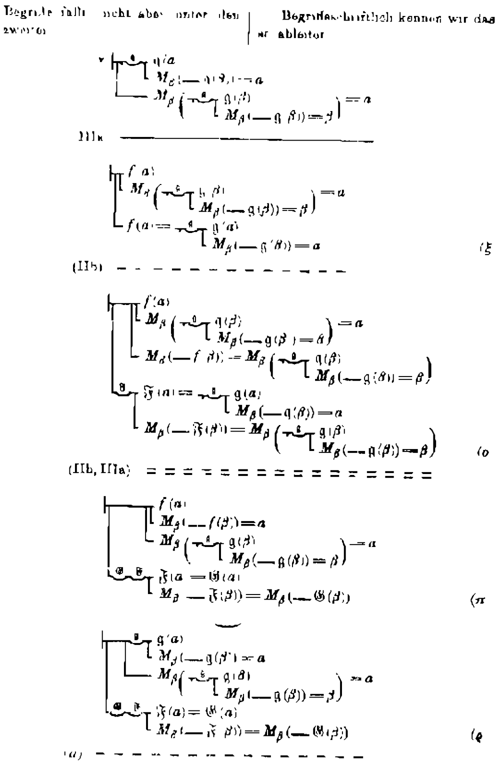
Non sono mancate, a partire dalla fine degli anni sessanta, ampie applicazioni: dalla fisica matematica (acustiche, cambiamenti di stato, ecc.) alla biologia (modelli di Thom dello sviluppo embriologico), alla etologia (studio mediante catastrofi della predazione), alla linguistica e al pensiero creativo. Alcune modellizzazioni alquanto disinvolte, specie di fenomeni sociali (scoppio di rivolte nelle prigioni, *riots*, turbolenza sociale, ecc.) promosse soprattutto dal brillante topologo inglese E.C. Zeeman hanno suscitato una vasta controversia circa la portata del «paradigma catastrofista» che è lontana da spegnersi. Al di là della valutazione delle specifiche applicazioni e di una certa moda «catastrofista», il nucleo degli aspetti concettuali della controversia va ricercato soprattutto dall'enfasi che Thom attribuisce agli strumenti della topologia differenziale nella modellizzazione di processi – come quelli concernenti il vivente o il linguaggio – che paiono sfuggire alle abituali modellizzazioni quantitative che sfruttano potentemente le capacità espressive e computistiche dei moderni elaboratori. Poiché i «salti» (cioè le «catastrofi») che si individuano nell'evoluzione del sistema si possono (nell'impostazione thomiana) concettualmente dominare mediante la variazione (continua) di opportuni «parametri di controllo», è comprensibile che per Thom il continuo resti uno strumento di comprensione del reale essenziale, se non addirittura una sorta di *primum* originario, sia sotto il profilo ontologico che sotto quello conoscitivo.

Ma, anche prescindendo dalla «filosofia» personale dei creatori e dei propugnatori del «paradigma catastrofista», è innegabile che questo ordine di idee abbia il merito indubbio di segnalare tutta una serie di domini ove altri approcci – sia quello «classico» che quello «numerico» – non sembrano essersi spinti troppo oltre con successo. Inoltre esso spinge a rivedere i fondamenti di altre regioni del sapere matematico. È abbastanza diretto, per esempio, un legame con la teoria dell'informazione in quanto l'informazione può venire agevolmente considerata come una piccola quantità di energia che provoca grandi effetti, se utilizzata in modo opportuno.

In conclusione: si può dire che, a parte la fisica, anche chimica, biologia, scienze sociali, linguistica, ecc., sono molto ricche di fenomeni che presentano delle «soglie», oppure effetti di «grilletto», che scatenano processi e muovono quantità di materia e di energia spesso non comparabili con l'entità delle loro (apparenti) cause. Ora, tutte queste problematiche di effetti di soglia, di condizioni iniziali «perturbate», di avviamento di sistemi, di instabilità, di biforcazioni, ecc., potranno sempre piú avviarsi a una sistemazione teorica e a una formulazione (non necessariamente entro il solo quadro concettuale caro ai «catastrofisti») destinate ad articolarsi e raffinarsi sempre piú grazie a strumenti matematici che trovano le loro motivazioni prime in problemi estremamente concreti.

5. Alcune connessioni tra logica e matematica

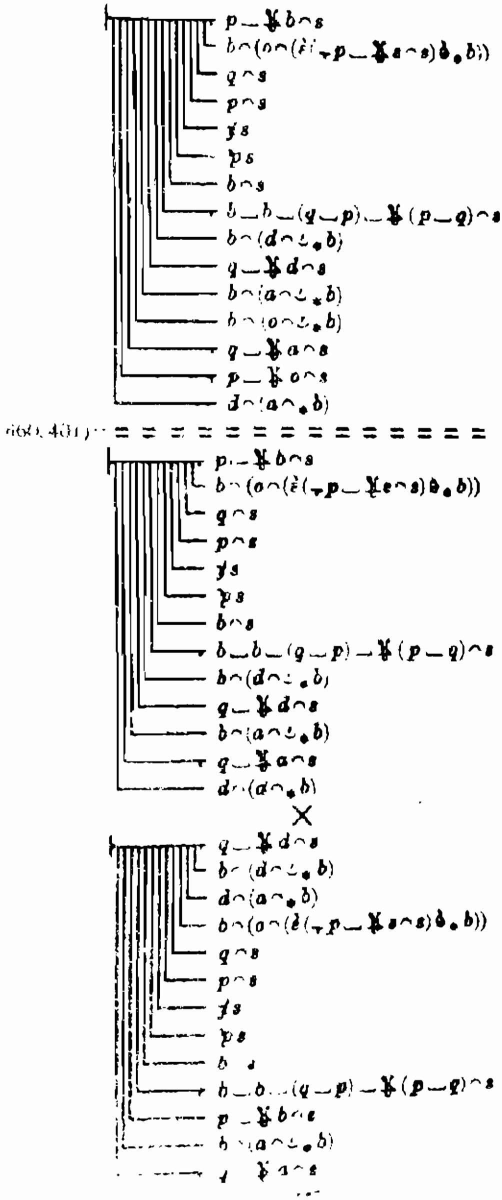
Da una parte l'aritmetizzazione dell'analisi (successiva alla definizione dei numeri reali secondo Weierstrass, Cantor, Dedekind e Méray nel 1872 e alla riduzione alla teoria dei numeri naturali delle teorie dei numeri negativi e delle frazioni), la creazione della «teoria degli insiemi» come edificio matematico dotato di una sua propria articolazione e autonomia (soprattutto per opera di Richard Dedekind e di Georg Cantor) costituiscono due delle premesse piú rilevanti del dispiegamento degli studi di logica e di fondamenti della matematica con cui si apre il Novecento. Già si è detto dell'attenzione di Peano per gli aspetti logici e notazionali, nonché del suo interesse per i problemi posti dalle varie fasi del processo di «aritmetizzazione». Va ora aggiunto che protagonisti della ricerca fondazionale nella seconda metà dell'Ottocento, come GOTTLOB FREGE (1848-1925) o lo stesso Dedekind erano disposti a compiere un passo che Peano invece non volle o non osò mai compiere, quello della *riduzione* dei «principi dell'aritmetica» a «leggi logiche». L'idea, *in nuce*, per esempio nel Dedekind di *Essenza e significato dei numeri* (1888), per cui «il concetto stesso di numero non è che un'emanazione immediata delle leggi pure dell'intelletto», già aveva trovato un'articolazione con Frege, come mostrano i suoi *Fondamenti dell'aritmetica* (1884) in cui è scritto che «l'aritmetica non sarebbe altro che una logica sviluppata: ogni proposizione aritmetica non sarebbe altro che una legge logica, dunque una proposizione derivata». Tale punto di vista destinato a diventare celebre sotto il nome di *logicismo*, ha il suo «manifesto» con una famosa battuta di Bertrand Russell che, nei *Principi della matematica* (1903), proclama: «tutta la matematica è logica simbolica» e questa è «una delle piú formidabili scoperte del nostro tempo».



Pagina dai Grundgesetze der Arithmetik *di G. Frege, che mostra il simbolismo della logica matematica elaborata dall'autore.*

Il programma «logicista» doveva trovare attuazione soprattutto nei monumentali tre volumi dei *Principia Mathematicae* (prima edizione: 1910-1913) dovuti allo sforzo congiunto di Russell e di ALFRED NORTH WHITEHEAD (1861-1947). Influenzato da Peano, Russell in particolare veniva proponendo «un sistema di notazioni» che doveva permettere la ricostruzione di *tutta* la matematica sulle basi «solide come roccia» della logica (l'espressione è già in Frege). L'enfasi sulla «sicurezza» è motivata qui dalla esigenza di far fronte a quella «crisi dei fondamenti» che si era aperta agli inizi del secolo con l'affiancarsi a tradizionali paradossi (come il celeberrimo «paradosso del mentitore» che risale al pensiero greco classico: «Epimenide il cretese dice: *Tutti i cretesi mentono*») di alcune antinomie di carattere piú o meno tecnico scoperte nel volgere di pochi anni (antinomia di Cantor o «del massimo cardinale», 1895; antinomia del «massimo ordinale», 1897, segnalata da C. BURALI-FORTI, 1861-1931, allievo di Peano; antinomia di Russell, scoperta nel 1901 e comunicata da quest'ultimo a Frege in una lettera del 1902 con queste parole: «Caro collega [...] io mi trovo in completo accordo con lei in tutte le cose essenziali [...]. C'è un solo punto dove io ho incontrato una difficoltà [...]. Sia *w* il predicato: essere un predicato che non può essere predicato di se stesso? Può *w* essere predicato di se stesso? Da ogni risposta discende l'opposta»; e altre ancora). La proposta di Russell consiste nel bandire – mediante opportune «regole grammaticali» – le cosiddette «definizioni impredicative», ovvero quelle definizioni che si fondano su una relazione tra l'oggetto che va definito e tutti gli individui di un genere cui si suppone che questo stesso oggetto appartenga. Lo sforzo russelliano (già abbozzato nel 1908 e quindi ampiamente articolato nei *Principia*), ha prodotto un'importante teoria logica, la «teoria ramificata dei tipi» che ha rappresentato, agli occhi del primo empirismo logico, il prototipo dei «linguaggi perfetti» atti a dissolvere paradossi e pseudoproblemi. Ma le sue difficoltà dovevano condurre anche a versioni notevolmente semplificate, come la «teoria dei tipi semplici» proposta nel 1925 da F.P. Ramsey (1903-1930) come più atta a svolgere l'originario programma logicista.

Oggi si può dire che la riduzione della matematica alla teoria degli insiemi è tecnicamente un fatto acquisito; ma è assai discutibile che i principi di quest'ultima teoria possano essere pacificamente accettati come «leggi logiche» e addirittura come «principi generali dell'intelletto» (è sensato, per esempio, considerare una «legge logica» l'assioma di scelta, di cui lo stesso Russell faceva ampiamente uso o anche qualche altro dei suoi principi come «l'assioma dell'infinito» che sancisce l'esistenza di infiniti individui?). Va anche aggiunto che la comunità matematica solo in misura esigua ha seguito la strada indicata da Russell. Innanzitutto va notato che non pochi matematici, di fronte alla «crisi dei fondamenti», ebbero un atteggiamento analogo a quello espresso, pur con notevoli differenze, da Peano in Italia e da Poincaré in Francia, per cui l'antinomia di Russell riguarda più il linguaggio che la effettiva pratica matematica (va detto che, per altro, Poincaré inclinerà, nei primi anni del Novecento, verso posizioni per molti versi affini al «predicativismo» di Russell). Altri, invece, più sensibili ai problemi di fondamenti, condivisero l'idea che Russell già esprimeva in un'appendice dei suoi *Principi* del 1903, quella di restringere il dominio delle funzioni proposizionali (che era totalmente illimitato in Frege), in modo che certe asserzioni risultassero «prive di significato», ma ritennero di far ciò non utilizzando delle «regole di formazione» degli enunciati, ma ristrutturando con un'assiomatica rigorosa la base



Il simbolismo della logica matematica da una pagina dei Principi *di G. Frege.*

dell'edificio matematico, cioè la teoria degli insiemi. È questo il punto di vista che sottende le varie versioni assiomatiche della teoria degli insiemi oggi correntemente in uso, a cominciare da quella abbozzata da Ernst Zermelo (1871-1953) nel 1904 e 1908, e quindi ulteriormente perfezionata ad opera soprattutto di A. Fraenkel (1891-1965) e Th. Skolem (1887-1963).

Questo tipo di impostazione era certo piú vicino a quell'uso sistematico del metodo assiomatico come strumento di rigore e chiarificazione concettuale che David Hilbert aveva esemplarmente impiegato nei suoi *Fondamenti della geometria*. Ma mentre la coerenza, cioè l'assenza di contraddizioni, nel caso di teorie come la geometria euclidea classica o le stesse geometrie non-euclidee, era garantita dalla riduzione a un'altra teoria matematica considerata come piú «di base», nel caso di teorie fondanti – come la teoria dei numeri naturali o, a maggior ragione, la stessa teoria degli insiemi – si poneva l'esigenza di una «dimostrazione di coerenza» *diretta*. Riprendendo una tematica già *in nuce* nell'enunciato del suo problema II, Hilbert doveva sviluppare, nei primi trent'anni del secolo, un ampio programma («il programma di Hilbert») mirante non solo all'accertamento della non contraddittorietà delle teorie fondanti, ma a una vera e propria scienza dei procedimenti dimostrativi d'abitudine impiegati nella matematica. Nel 1922 scriveva: «Dobbiamo prendere le dimostrazioni in quanto tali come oggetto di esame. Per questa via giungeremo allora a una (...) *teoria della dimostrazione* che si occuperà delle operazioni che si possono effettuare sulle dimostrazioni stesse (...). Alla matematica propriamente detta, strettamente formalizzata (...), si affiancherà una matematica in senso nuovo, una *metamatematica* che ci serve a renderci sicuri della matematica stessa, proteggendola dal terrore dei divieti inutili e dalle difficoltà create dai paradossi». Su quest'ultimo terreno Hilbert faceva proprie le riserve dei costruttivisti radicali (cf. quanto detto piú oltre sul programma di Brouwer): per essere sicuramente «attendibili» i procedimenti della *metamatematica* devono essere «finitisti», devono cioè ammettere solo ragionamenti e costruzioni che si fermano al finito.

Non è il caso qui di accennare alla vasta gamma di risultati – per altro importantissimi – raggiunti sul finire degli anni venti da Hilbert e dalla sua scuola «formalista». Ma va osservato che nel 1931, nella memoria «Su alcune proposizioni indecibili dei "Principia Mathematica" e sistemi affini», Kurt Gödel (1906-1978) mostrava che una teoria formale (in cui è possibile decidere in un numero finito di passi se una formula della teoria è o no un assioma), se è sufficientemente espressiva, come per es. l'aritmetica elementare, e supposta coerente, contiene delle proposizioni che non si possono né *dimostrare* né *refutare* in essa. Di piú: un corollario del «teorema di incompletezza di Gödel» stabiliva che nessun sistema formale, che si supponga non contraddittorio e capace di formulare l'aritmetica elementare, poteva fornire la dimostrazione della propria non contraddittorietà.

Il risultato gödeliano è stato chiamato da qualcuno «la "Critica della Ragion Pura" del nostro secolo»: senza dubbio esso è un tipico risultato limitativo. Ma se pure ha segnato la fine dell'originario programma hilbertiano, esso non ha però bloccato la *Beweistheorie*, cioè la «teoria della dimostrazione», come mostra, pochi anni dopo (1936), la dimostrazione della non contraddittorietà dell'aritmetica ottenuta da Gerhard Gentzen (1909-1945) impiegando dei metodi che fuoriescono sí dall'ambito strettamente «finitista» in senso hilbertiano, ma si possono considerare per molti aspetti ancora «affidabili». Si è cosí prodotto uno slittamento di grande portata che ha favorito sul lungo periodo, lo sviluppo di una articolata *proof theory* che non si presenta piú come il tentativo di ridurre tutte le teorie formalizzate a una forma dominabile mediante strumenti limitati e precisati *a priori*, ma assume come proprio campo di ricerca il concetto generale di dimostrazione e la classificazione delle dimostrazioni in base al loro «grado di evidenza», ovvero al loro maggiore o minore «carattere costruttivo».

Va ancora ricordato che nel corso della citata memoria del 1931 Gödel presentò due nuovi strumenti tecnici. Il primo è la cosiddetta «aritmetizzazione della sintassi», che consente a una teoria, abbastanza «potente» da esprimere l'aritmetica, di parlare correttamente non solo dei propri oggetti, ma anche delle sue stesse proposizioni (la proposizione «formalmente indecidibile» costruita da Gödel nella memoria del 1931 non è altro che una proposizione G che «esprime» – grazie a tale tecnica – la propria indecidibilità o indimostrabilità). Il secondo è la teoria delle funzioni ricorsive che, fondata sostanzialmente in tale memoria allo scopo di consentire in modo effettivo l'aritmetizzazione, si è tramutata via via in un ramo assai articolato della logica matematica, permettendo (con i lavori di A. Church, A.M. Turing, A.A. Markov, E.L. Post, S.C. Kleene, sul finire degli anni trenta e all'inizio degli anni quaranta) una precisazione della nozione di «procedura effettiva», cioè di una procedura per la soluzione di un dato problema per la quale si è in grado di fornire un *algoritmo*, cioè, detto in breve, un complesso di istruzioni tipicamente «deterministico» e «meccanico» che permette di trovare la soluzione *in un numero finito* di passi. È immediata, dunque, la rilevanza delle *funzioni ricorsive*, ovvero, per usare la terminologia di Markov, degli *algoritmi* (in senso astratto) per gli stessi calcoli impostati su macchine reali, di cui queste nozioni costituiscono una naturale idealizzazione.

Ci sono almeno altri due risultati dovuti a Gödel che vale la pena di menzionare qui. Il primo concerne direttamente un altro grande «programma» di *rifondazione* della matematica, quello «intuizionista», promosso fin dal primo decennio del secolo dall'olandese L.E. Brouwer e ripreso successivamente, oltre che dallo stesso Brouwer, da non pochi ricercatori, tra cui A. Heyting. Va subito premesso che qui il termine «rifondazione» va inteso in senso forte: per gli «intuizionisti», al contrario che per i sostenitori di altri indirizzi (come i «formalisti» o i «logicisti»), non si tratta di giustificare con strumenti *nuovi* la *vecchia* matematica, ma di costruire una matematica *alternativa*, i cui concetti-base abbiano contenuto «costruttivo». Per dirla con le parole di Brouwer (1918), «non esiste neanche per la matematica un linguaggio sicuro, che escluda il presentarsi di fraintendimenti e con l'accuratezza assicuri la libertà dall'errore (...). Né si può migliorare questa circostanza sottoponendo, come fa la scuola formalista, a una considerazione matematica la stessa lingua matematica, cioè il sistema di segni che serve ad altri uomini per nominare *costruzioni* di matematica pura». A parere di Brouwer la fiducia nel potere «magico» del linguaggio proveniva essenzialmente dalla «fede» nella *logica classica*. Adeguata al finito, quest'ultima è però fuorviante quando il matematico affronta l'infinito: a parere di Brouwer, principi fondamentali, come il classico principio *del terzo escluso*, non valgono dunque in generale nel contesto delle matematiche. La costituzione di una «logica intuizionista» e gli sviluppi di una matematica strettamente «costruttiva» secondo i principi di Brouwer – articolatasi via via in un'aritmetica e in un'analisi intuizioniste, quindi in una teoria della misura e una topologia intuizioniste, per non dire della «teoria dei dispiegamenti» che costituisce la controparte intuizionista della teoria degli insiemi – non potevano dunque non dare luogo a vivacissime polemiche, sia con logici legati a concezioni differenti dei fondamenti sia con matematici militanti sconcertati dal radicalismo brouweriano. Nel 1929, V. Glivenko, seguendo un suggerimento di Kolmogorov, mostrava, ancor prima che Heyting ultimasse la sua presentazione formale della logica intuizionista (1931), che ogni dimostrazione del calcolo proposizionale classico si poteva trasformare in una dimostrazione accettabile anche per il logico intuizionista, semplicemente premettendo due negazioni davanti a ciascuna formula. Nel 1932 Kurt Gödel estendeva potentemente questo risultato, mostrando che mediante una opportuna «traduzione» si poteva interpretare l'*aritmetica* classica entro l'*aritmetica* intuizionista. È lo stesso Gödel, in quella sede, a rimarcare che tale risultato riduce la portata stessa della controversia, almeno per quanto riguarda logica e aritmetica, ove il punto di vista classico e quello intuizionista risultano sotto un certo profilo «equivalenti», mentre là dove differiscono – per esempio nell'analisi – la ragione della differenza non va cercata nel rifiuto di leggi classiche come il terzo escluso, ma nella condanna delle definizioni impredicative (il che evidenzia gli stretti legami tra il punto di vista intuizionista e quello degli altri «predicativisti»).

Un altro grande contributo gödeliano riguarda sostanzialmente le usuali teorie assiomatiche degli insiemi, come quella edificata da Zermelo, Fraenkel e Skolem (cf. piú sopra, p. 267) e, specificatamente, le questioni relative all'*ipotesi del continuo* e all'*assioma della scelta*. La prima questione consiste, in breve, nel chiedersi se esiste un «numero cardinale» (o «potenza») intermedio tra quello del «numerabile» (caratteristico per esempio dell'insieme dei numeri naturali, dell'insieme dei numeri interi relativi e dell'insieme dei numeri razionali) e quello del «continuo» (caratteristico, per esempio, dell'insieme dei numeri reali, dell'insieme dei numeri complessi, dell'insieme dei punti della retta euclidea, ecc.). Cantor, dopo essersi affannato invano nel tentativo di risolvere il problema, aveva dovuto limitarsi ad affermare, come semplice ipotesi, che tale numero cardinale intermedio *non* esiste. Hilbert aveva collocato «il problema del continuo di Cantor» al primo posto nel suo celebre elenco e aveva poi cercato di risolverlo, ma anch'egli senza successo; anche altri tentativi erano andati a vuoto. Quanto all'assioma «della scelta» (o «assioma moltiplicativo» come lo chiamava Russell all'inizio del secolo), esso enuncia (formulazione di Zermelo) che, data una collezione infinita di insiemi, si può ottenere un nuovo insieme *scegliendo* arbitrariamente un elemento di ciascuno degli insiemi dati. Impiegato implicitamente dallo stesso Cantor e anche da altri, fin dalle prime formulazioni esplicite da parte di Russell e Zermelo, l'assioma era stato respinto per il suo carattere tipicamente non costruttivo da alcuni matematici, specie francesi e italiani, che preferivano, pur di non impiegarlo, dimostrazioni molto piú lunghe e tortuose, ma «affidabili»; e non pochi sospettavano che potesse risultare contraddittorio con i restanti assiomi della teoria degli insiemi. Nel giro di due anni (1938-1940) Gödel doveva dimostrare – sfruttando una tecnica diventata nota come «metodo dei modelli interni» – che sia l'ipotesi cantoriana che l'assioma della scelta sono compatibili con gli altri assiomi (ovvero, *se* la teoria degli insiemi non è contraddittoria senza assioma della scelta e ipotesi del continuo, non lo diviene aggiungendo tali proposizioni). Nel 1963 P.J. Cohen ha mostrato che anche le negazioni dell'ipotesi del continuo e dell'assioma di scelta sono compatibili con gli altri assiomi: l'ipotesi cantoriana del continuo e l'assioma di scelta *non* sono dunque *decidibili* nell'usuale teoria assiomatica degli insiemi. Il risultato di Cohen richiede un metodo diverso da quello dei modelli interni, che Cohen ha chiamato metodo del *forcing*: il testo in cui Cohen ha presentato in forma sistematica i risultati di Gödel e i propri: *La teoria degli insiemi e l'ipotesi del continuo* (1966, tr. it. 1973) ne contiene una versione completa ed esauriente ed è ormai un punto di riferimento classico.

Certamente anche questi risultati di Gödel e di Cohen si possono considerare «limitativi», in quanto in qualche modo configurano i limiti di certi strumenti formali, contro una certa fiducia ingenua che animava ancora i grandi capiscuola dei primi del Novecento (come lo stesso Hilbert che proprio nei *Problemi matematici* aveva espresso la convinzione che ogni problema matematico fosse risolubile in senso positivo o negativo). Per qualcuno, risultati come quelli citati sarebbero addirittura dei «segnali» che indicano l'impraticabilità di certe direzioni di ricerca, «un po' come dei paracarri che ci indicano di non andare fuori strada», per usare una immagine cara a René Thom. Ma va comunque segnalata la rilevanza concettuale delle tecniche che via via sono state escogitate per stabilire quei «teoremi limitativi», nonché la loro rilevanza nell'approfondire nozioni che sembrano collocarsi alla frontiera tra matematica ed epistemologia.

In quest'ordine di idee varrà la pena di richiamare ancora un ultimo risultato che può essere anch'esso interpretato come esprimente una limitazione, ma che ha contribuito notevolmente a chiarire un nodo cruciale, ad un tempo filosofico e matematico. Si tratta del «teorema di Tarski» ottenuto dal logico polacco ALFRED TARSKI (n. 1901) pressappoco nello stesso periodo in cui Gödel perveniva al suo «teorema di incompletezza». In una ormai celebre memoria, *Sulla nozione di verità nei linguaggi formalizzati*, composta originariamente in polacco (1930-1931), poi apparsa in tedesco (1936), e conosciuta oggi soprattutto nella versione inglese, Tarski mostrava che per un linguaggio formale non può esistere (salvo contraddizione) una qualsiasi definizione di verità che possa venir formulata servendosi dei soli mezzi espressivi del linguaggio stesso. L'essenziale distinzione tra il linguaggio in questione («linguaggio oggetto») e un linguaggio piú potente («metalinguaggio») in cui formulare un'adeguata nozione di verità per il linguaggio oggetto, consentiva a Tarski di eludere classiche antinomie (come quella «del mentitore»), ma con ciò stesso approfondiva la separazione tra *linguaggi formali* e *linguaggio comune*.

Non è minimamente possibile in questa sede tratteggiare gli ampi sviluppi della «semantica delle teorie formalizzate» che si sono affiancati alle indagini piú tipicamente «sintattiche» grazie all'opera di Tarski e dei suoi collaboratori. Né vanno dimenticate tutte le ricerche «metamatematiche» sviluppate da varie scuole e in diversi Paesi, relativamente alle varie «strutture» che soddisfano gli assiomi di questa o quella teoria formale. È dall'incrocio di queste tendenze che è nata la «teoria dei modelli»: il termine *modello*, che in questa accezione tecnica pare essere stato introdotto da J. von Neumann in una memoria del 1925, designa appunto una struttura che si presuppone studiata da un dato linguaggio formale. La teoria dei modelli costituisce, quindi, a un notevole livello di astrazione, l'esplicitazione delle relazioni che intercorrono tra la «forma» e il «contenuto» (per usare una classica terminologia) delle varie teorie. Lo studio dei modelli di una data teoria (condotto di norma nel quadro concettuale della teoria degli insiemi, impiegando spesso principi «forti» della teoria, come l'assioma di scelta o la stessa ipotesi del continuo) permette di ricavare importanti informazioni circa le caratteristiche formali della teoria medesima.

Non è qui però possibile accennare ai grandi risultati della teoria dei modelli nell'epoca della sua costituzione in disciplina autonoma e riconosciuta (*grosso modo*, durante gli anni cinquanta), né alla sua notevolissima crescita (nel ventennio successivo). Sia lecita una sola eccezione. Agli inizi degli anni sessanta il logico e matematico ABRAHAM ROBINSON (1918-1974) ha mostrato come teorie formali dei numeri reali posseggano, oltre al modello usuale (o «standard») R dei modelli «non-standard» R^*, formalmente indistinguibili da R, che estendono R in quanto contengono, oltre a una parte isomorfa a R, sia «numeri» maggiori di qualsiasi numero di R, sia «numeri» (positivi) minori di qualsiasi reale positivo in R, cioè, rispettivamente, degli «infiniti» e degli «infinitesimi». In un qualche senso, come lo stesso Robinson ha sottolineato nel suo volume *Non standard Analysis* (1966) e altrove, questo fatto «riabilita» la concezione «infinitesimale» di Leibniz e di altri pionieri del calcolo, anche se il quadro concettuale di fondo resta, ovviamente, quello «rigoroso» della moderna teoria degli insiemi. Generalizzate ai numeri complessi e quindi ai vari spazi topologici, le idee di Robinson si sono rilevate estremamente feconde dal punto di vista euristico per risolvere alcuni problemi classicamente ancora irrisolti (per es., in analisi funzionale) e, allo stesso tempo, particolarmente felici e intuitive in non poche applicazioni (fisica matematica, probabilità, economia, ecc.). Va però tenuto presente un (meta)teorema ottenuto da G. Kreisel per cui, detto in breve, ogni risultato formulabile senza esplicito riferimento a entità non standard, ma ottenuto mediante mezzi non standard, è in via di principio ottenibile anche con gli usuali metodi standard.